INTRODUCCIÓN

Flujo en Superficie Libre

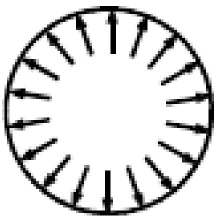
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

1. TIPOS DE CONDUCCIÓN

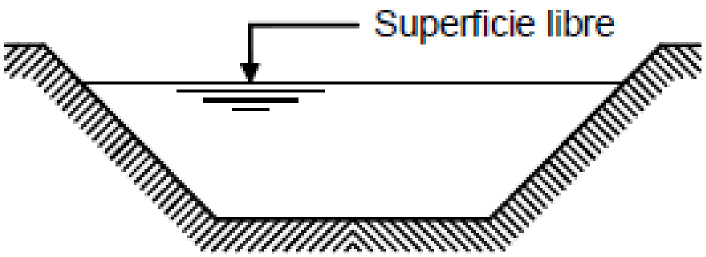
Son dos:

1. Canales (el movimiento se debe a la gravedad)

2. Tuberías (el movimiento se debe a la presión)

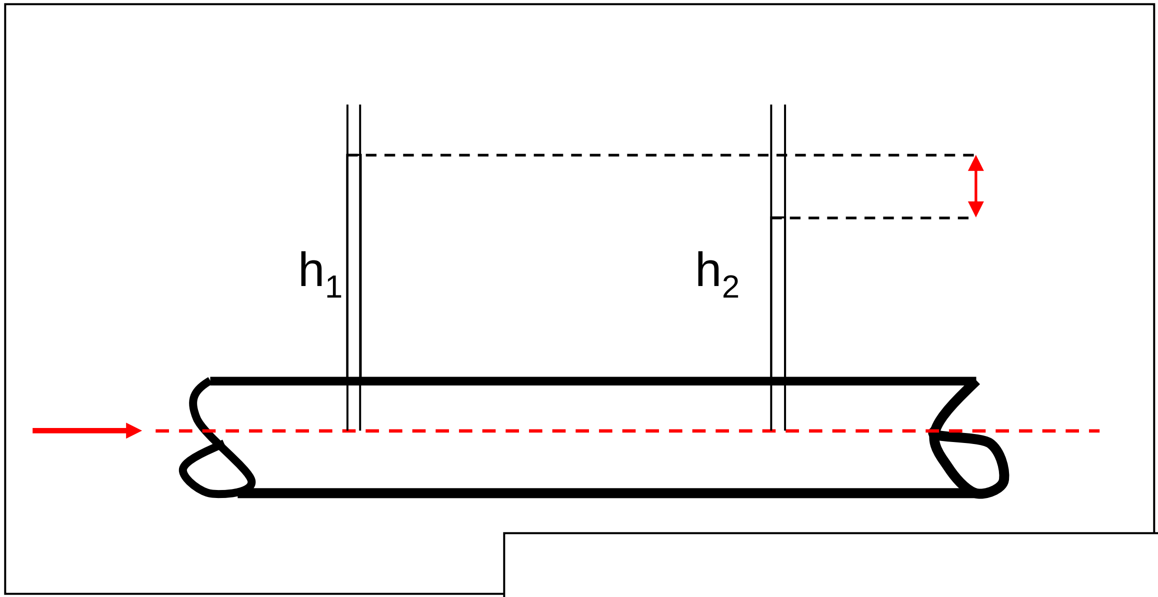


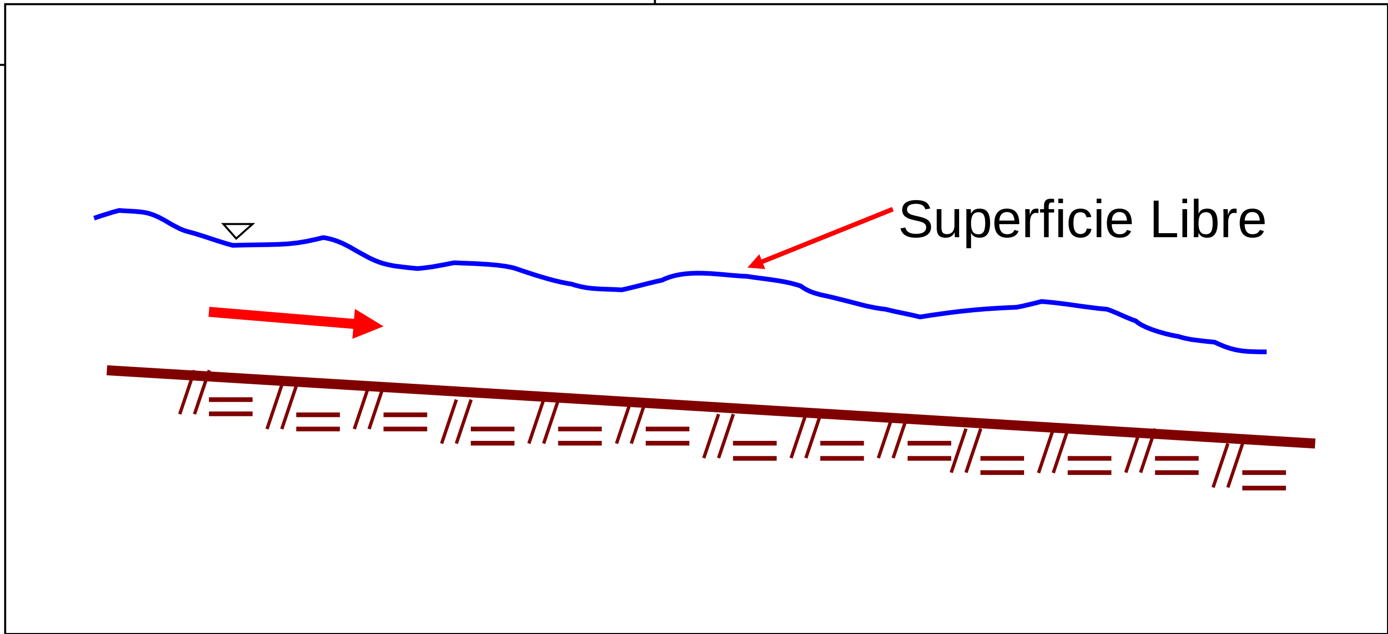
TUBERIA



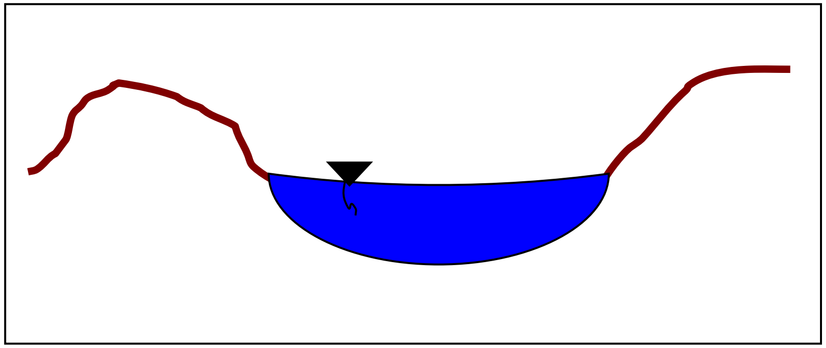
CANAL

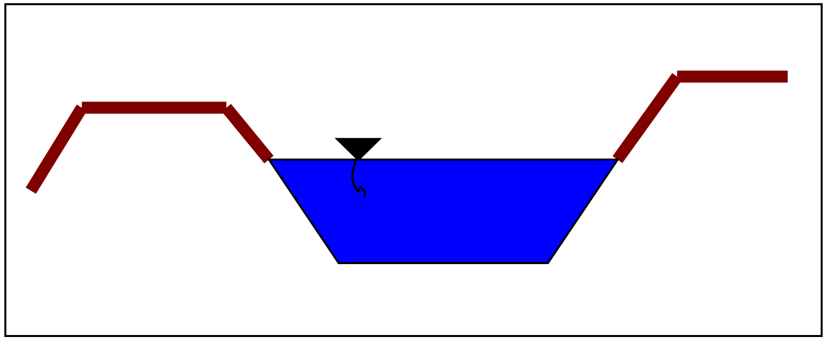
1. TIPOS DE CONDUCCIÓN (2)

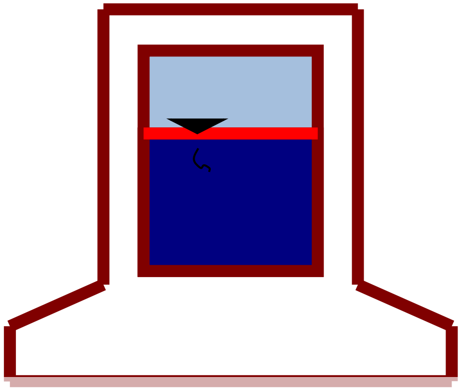


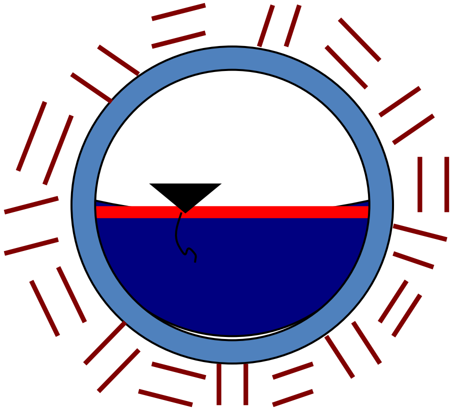


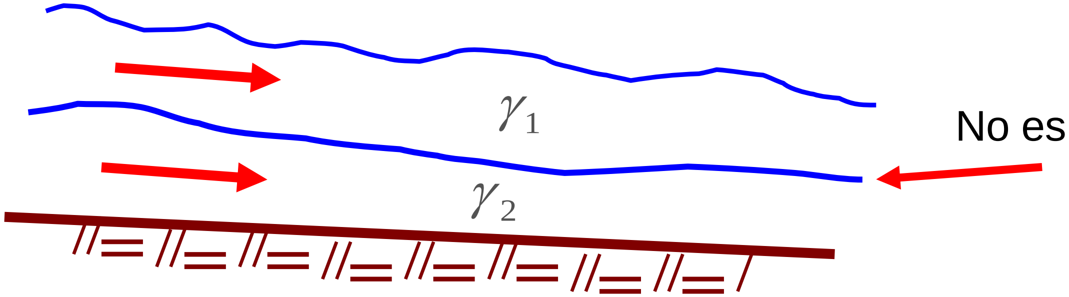
2. FLUJO EN SUPERFICIE LIBRE (1)











No es superficie libre

2. FLUJO EN SUPERFICIE LIBRE (2)

- El movimiento es causado por gravedad.
- Siendo la gravedad la fuerza que origina el movimiento, el número de Froude puede usarse para caracterizarlo:

$$F = \frac{V}{\sqrt{gD}}$$

- El número de Froude representa la relación entre fuerzas inerciales y fuerzas gravitacionales.
- Dependiendo de su valor, se define:

  - Flujo subcrítico : $Fr < 1$

  - Flujo crítico : $Fr = 1$

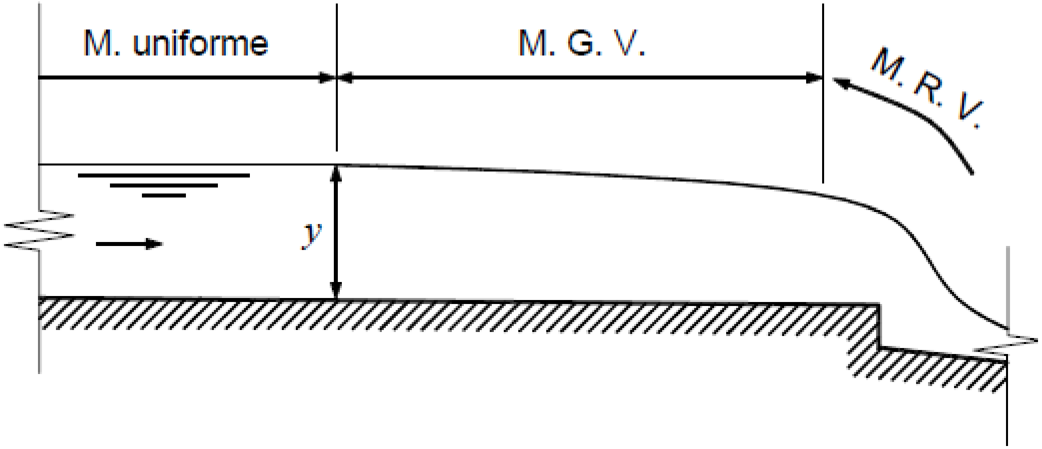
  - Flujo supercrítico : $Fr > 1$

3. TIPOS DE FLUJO

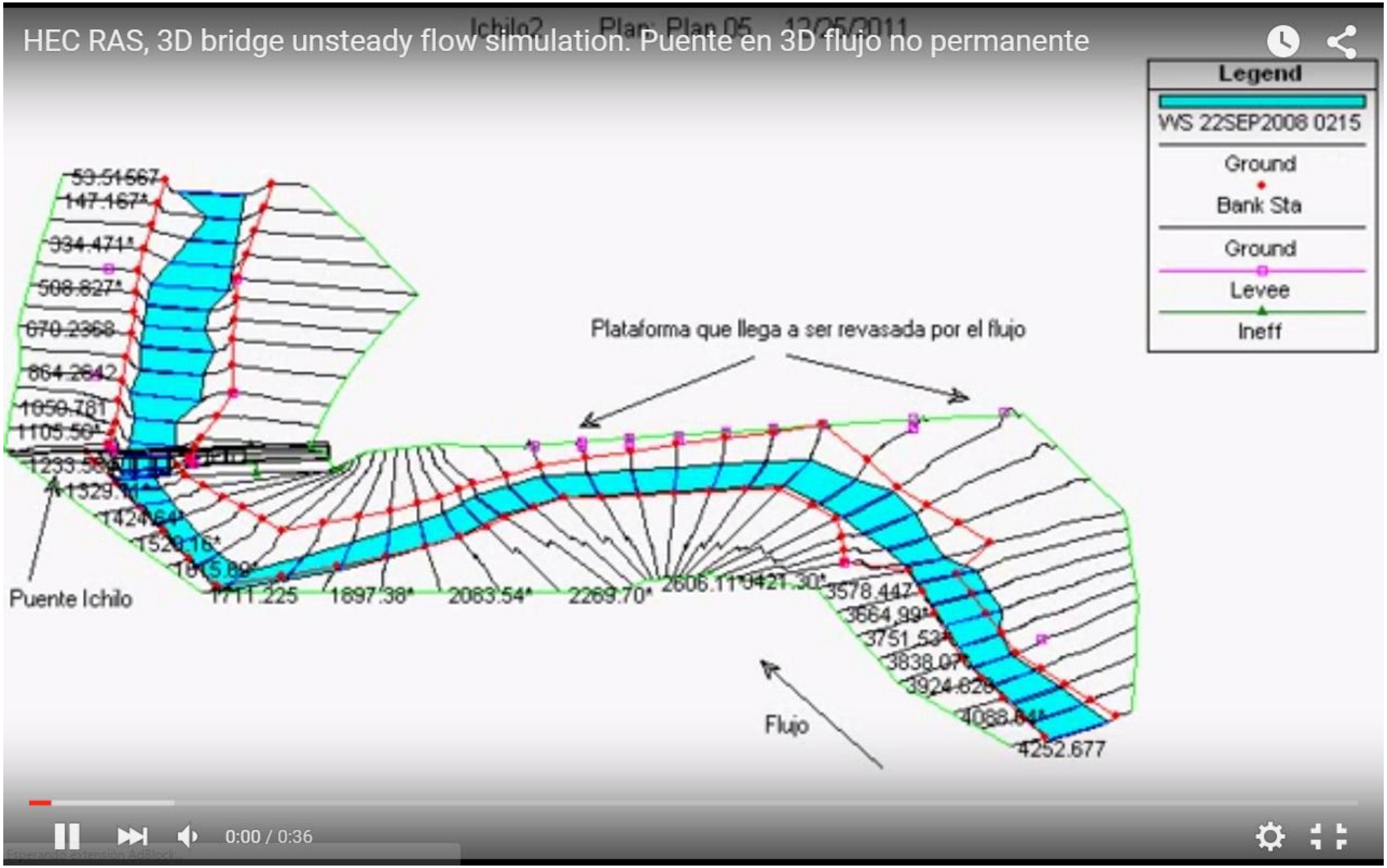
Hay muchas clasificaciones pero dos tienen especial interés:

1. Flujo permanente y no permanente; es permanente si las características del flujo se mantienen constantes en una sección a lo largo de un cierto período de tiempo.

2. Flujo uniforme y variado; es uniforme si las condiciones hidráulicas se mantienen constantes en cada sección.



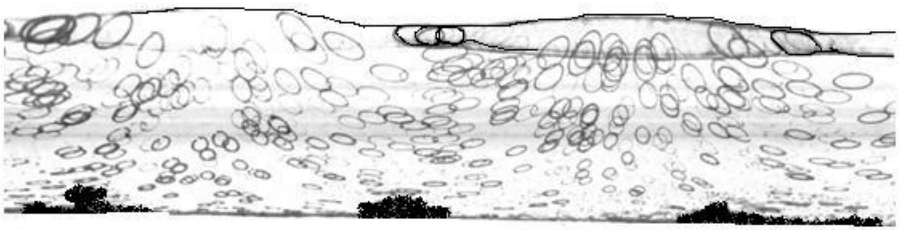
3. TIPOS DE FLUJO



4. LÍNEAS DE TRAYECTORIA, DE TRAZA Y DE CORRIENTE (1)

- Una línea trayectoria muestra el recorrido de una partícula de fluido.

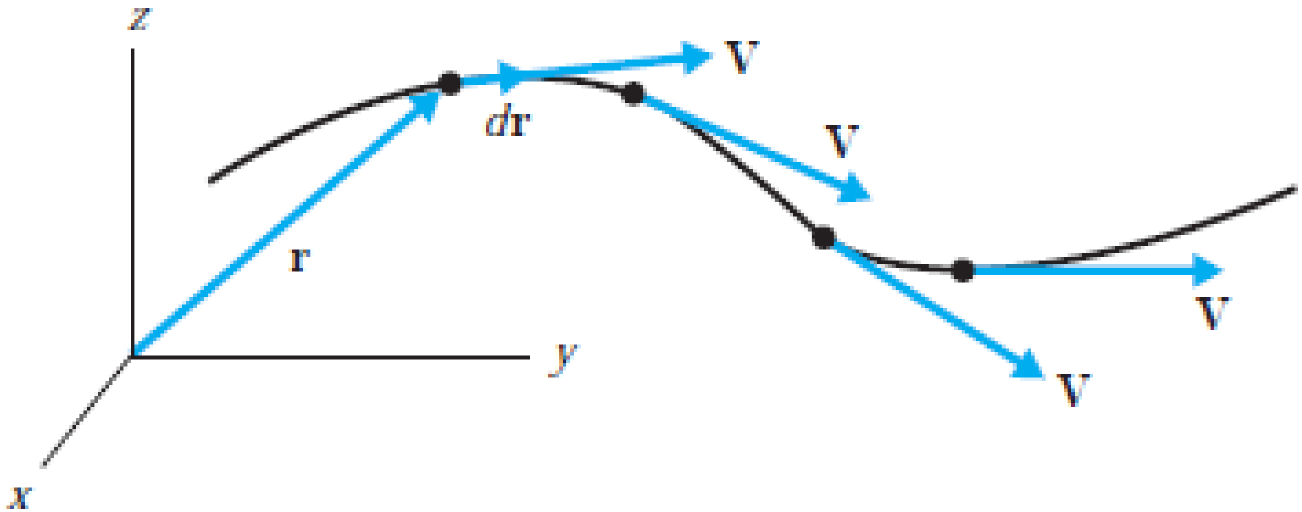
- La linea de traza es la línea definida por todos los puntos que han pasado (o iniciado su movimiento) por un punto de interés definido.



4. LÍNEAS DE TRAYECTORIA, DE TRAZA Y DE CORRIENTE (3)

- Cada punto de ésta es tangente a su vector velocidad instantánea; es decir, si la trayectoria está definida por el vector dr y éste es tangente a su V, resultan dos vectores paralelos y se cumple que:

$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$$



5. CAMPO DE FLUJO

- Es cualquier región en el espacio donde hay un fluido en movimiento, a condición de que la región este ocupada por el fluido.

- En cada punto del campo de fluido es posible determinar o especificar una serie de magnitudes físicas, ya sean escalares, vectoriales o tensoriales, que forman a su vez campos independientes o dependientes dentro del flujo.

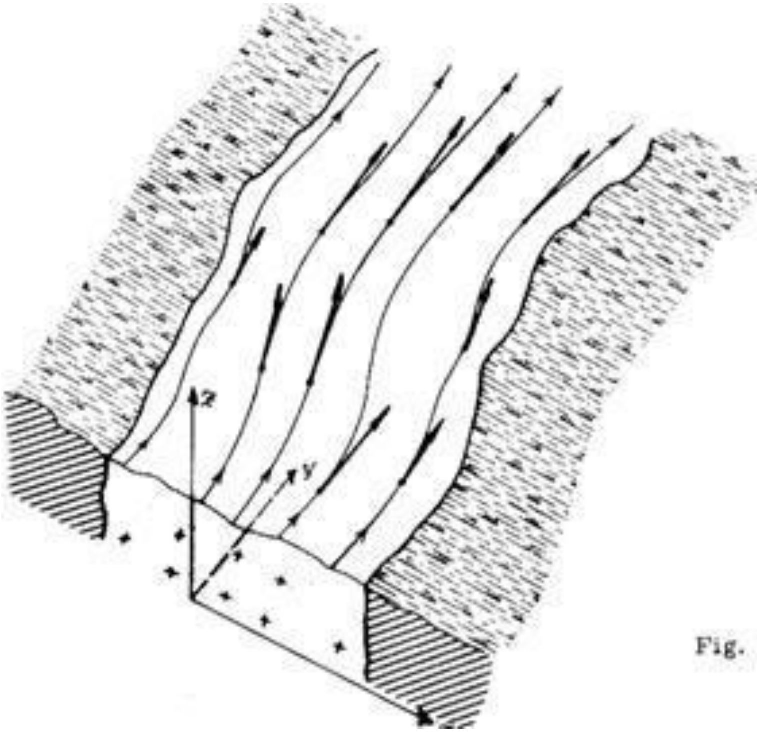


Fig.

5. CAMPO DE FLUJO

$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=u(x,y,z,t)\cdot\mathbf{i}+v(x,y,z,t)\cdot\mathbf{j}+w(x,y,z,t)\cdot\mathbf{k}$

(Coordenadas Cartesianas)

$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=u_r(r,\theta,z,t)\cdot\mathbf{e}_r+u_\theta(r,\theta,z,t)\cdot\mathbf{e}_\theta+w(r,\theta,z,t)\cdot\mathbf{k}$

(Coordenadas Cilíndricas)

$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=u_r(r,\theta,\varphi,t)\cdot\mathbf{e}_r+u_\theta(r,\theta,\varphi,t)\cdot\mathbf{e}_\theta+u_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\cdot\mathbf{e}_\varphi$

(Coordenadas Esféricas)

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)}$$

$$\boxed{\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}}$$

Cartesian

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Cylindrical

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

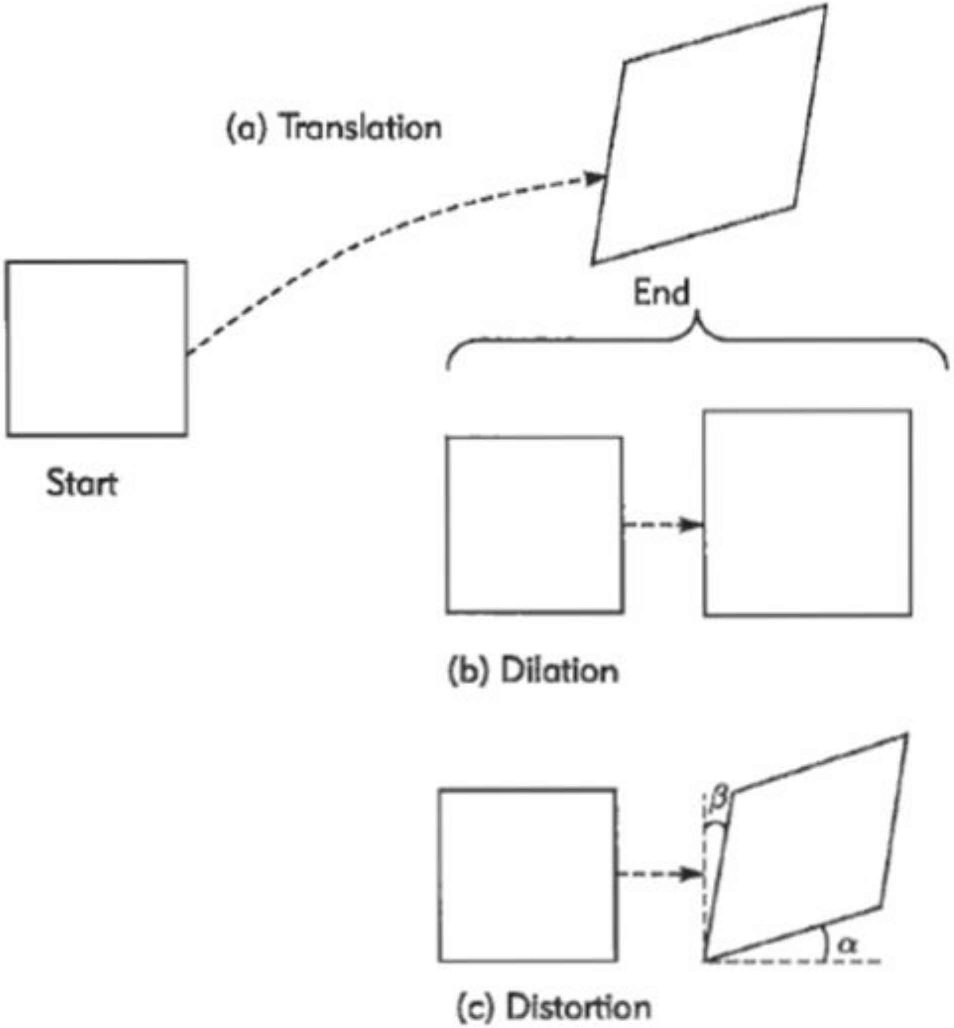
Spherical

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

6. DISTORSIONES DE UN FLUIDO (1)

- Un fluido en movimiento se "transforma" en función a 3 procesos básicos:

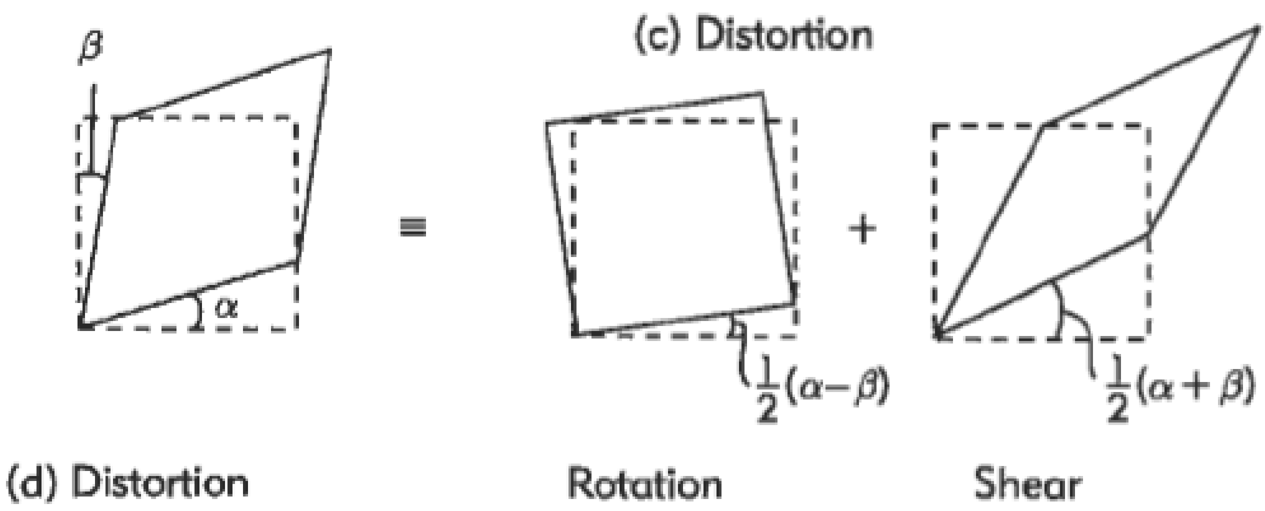
1. Traslación; el volumen cambia de posición, pero mantiene su forma y volumen.
2. Compresión/dilatación; el fluido mantiene su forma pero su volumen se incrementa o reduce.
3. Distorsión; el volumen se conserva pero la forma cambia.



7. DISTORSIONES DE UN FLUIDO (2)

- A su vez, la distorsión puede considerar como la superposición de dos efectos: la rotación y el corte.

- Los ángulos α y β son las deformaciones de corte; así, la rotación se define a través de $(\alpha - \beta)/2$, y el corte a través de $(\alpha + \beta)/2$.



8. DEFORMACIONES

- Es una representación del desplazamiento entre partículas en el cuerpo respecto a una longitud de referencia.

- Al igual que los esfuerzos, una deformación dada puede descomponerse en:

- Deformación de corte; que es la causante de la distorsión.

- Deformación normal o directa; que es la causante de la compresión.

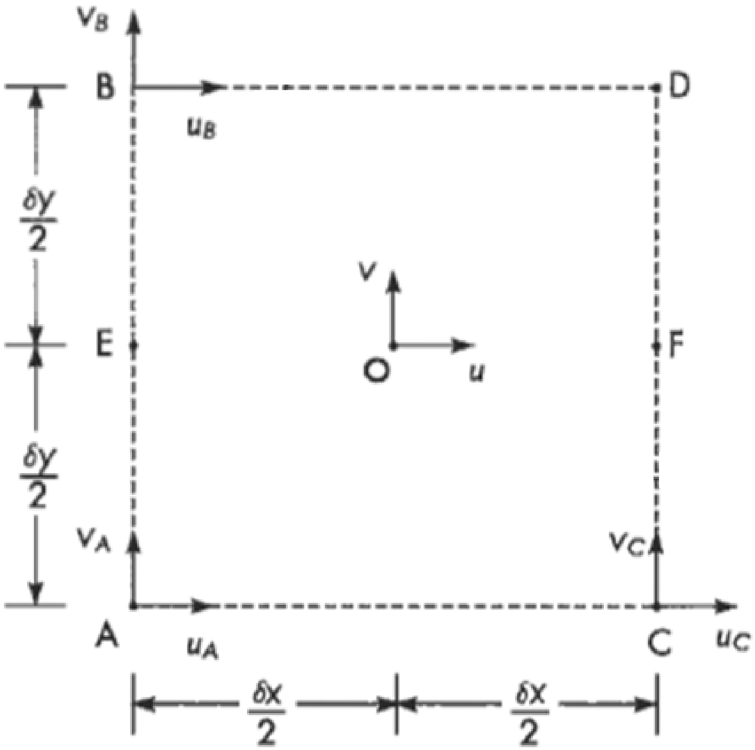
9. VELOCIDAD DE DEFORMACION DE CORTE (1)

- Dado el volumen ABCD, y un punto O ubicado en su centro. Si la velocidad en O está dada por (u; v), las velocidades en sus vértices (en función de u y v) serán:

$$u_A = u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2} \quad v_A = v - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$$

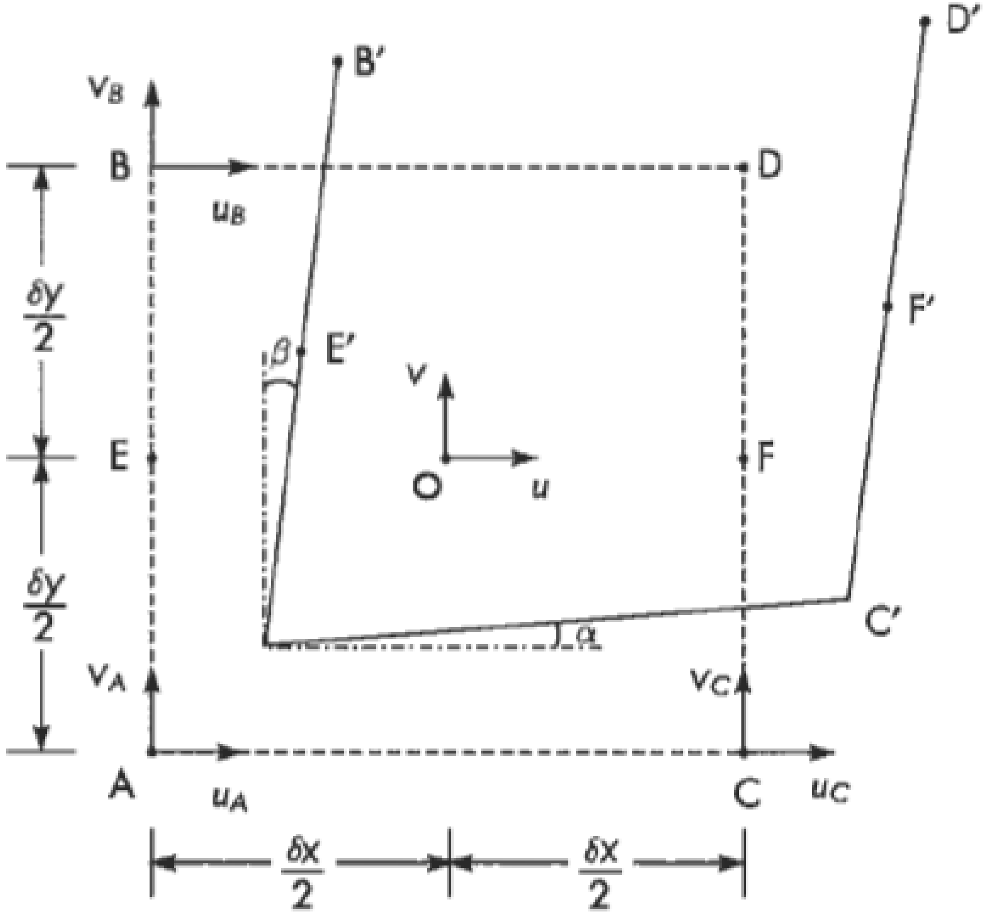
$$u_B = u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2} \quad v_B = v - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$$

$$u_C = u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2} \quad v_C = v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$$



9. VELOCIDAD DE DEFORMACION DE CORTE (2)

- Si el volumen se desplaza a una nueva ubicación:



9. VELOCIDAD DE DEFORMACION DE CORTE (3)

- La nueva ubicación de cada vértice se calculará como:

$$x_{A'} = u_A \delta t, \qquad y_{A'} = v_A \delta t$$

- Las deformaciones α y β serán:

$$\alpha = \frac{y_{C'} - y_{A'}}{\delta x} \qquad \beta = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{\delta y}$$

y reemplazando las velocidades se obtiene:

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \qquad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t$$

9. VELOCIDAD DE DEFORMACION DE CORTE (4)

- La Velocidad de deformación de corte se define como la variación del corte respecto al tiempo:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta t + \frac{\partial u}{\partial y}\delta t\right)\frac{1}{2\delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- La Velocidad de deformación de corte en las otras dos direcciones es:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{d\gamma_{xz}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{d\gamma_{yz}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

10. VELOCIDAD DE DEFORMACION DE NORMAL (1)

- Cogiendo dos puntos paralelos E y F (pueden ser también A y C), relación entre la longitud F'E' y la longitud inicial FE es:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{x_{F'} - x_{E'}}{x_F - x_E}$$

que se conoce como deformación directa o normal.

- Reemplazando las expresiones encontradas para la velocidad:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{x_{F'} - x_{E'}}{x_F - x_E} = \frac{\partial u}{\partial x}\delta t$$

10. VELOCIDAD DE DEFORMACION DE NORMAL (2)

- Derivando respecto al tiempo se obtendrá la Velocidad de deformación normal:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{xx}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{yy}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{zz}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Con las razones de deformación de corte y de deformación normal, se forma el llamado “tensor de velocidades de deformación”.

11. VORTICIDAD (1)

- Como se mencionó, la rotación se define usando (a – b)/2
  de esta manera, la Velocidad instantánea de rotación de un fluido será:

$$\Omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{\alpha' - \beta'}{2}$$

- Luego, el vector velocidad angular será:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

- El doble de la velocidad angular se denomina “vorticidad”, que se define como:

$$\omega = 2\Omega$$

11. VORTICIDAD (1)

- La vorticidad puede estimarse en las tres diferentes direcciones, conformando un “vector vorticidad”:

$$\omega = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \nabla x V$$

- Como se observa, la vorticidad es el “doble de la Velocidad instantánea de rotación” del elemento fluido.

12. LEYES BÁSICAS

Son tres:

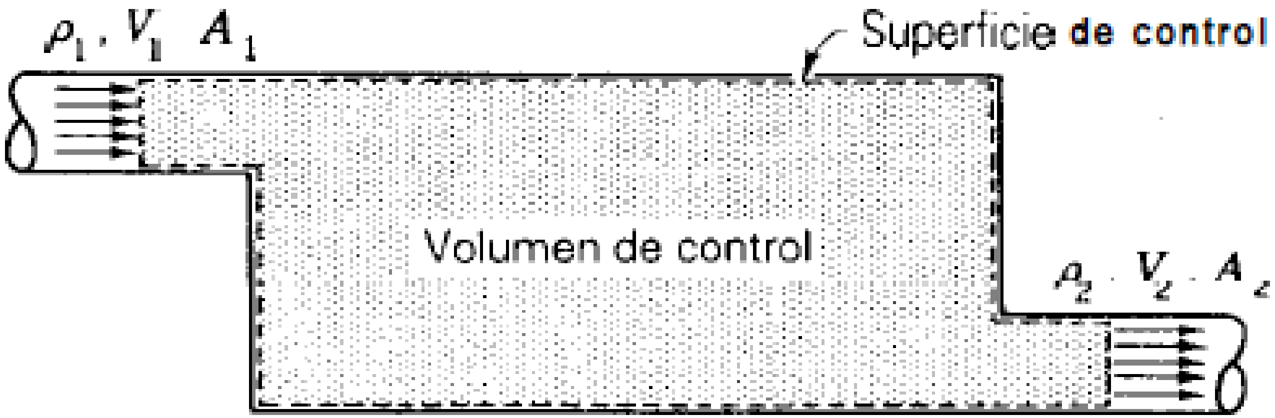
1. Conservación de la materia (ecuación de continuidad)

2. Segunda ley de Newton (ecuación de *momentum)*

3. Conservación de energía (primera ley de la termodinámica)

13. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD (1)

- Dado un volumen de control, con una entrada y una salida:



se cumple la ley de la conservación de la masa:

$$\oint\!\!\oint_{SC} (\rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = 0$$

13. ECUACIÓN DE CONTINUIDAD (2)

- Para una sustancia homogénea:

$$\oiint_{SC} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = 0$$

Si solamente hay una entrada y una salida:

$$\oiint_{SC} (\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = \iint_{A_1} (\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \iint_{A_2} (\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = 0$$

- Si las áreas son perpendiculares al flujo:

$$\oiint_{SC} (\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = -\iint_{A_1} \rho V \, dA + \iint_{A_2} \rho V \, dA = 0$$

- Para densidad constante:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

14. ECUACIÓN DE ENERGÍA (1)

- El calor agregado a un sistema Q menos el trabajo realizado por este W depende sólo de los estados inicial y final del sistema:

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

- dE/dt es igual a la rapidez de aumento de E en el volumen de control más la rapidez del flujo neto de E a través de la superficie del volumen de control

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho e dV + \int_{sc} \rho e \vec{v}.\overrightarrow{dA}$$

donde "e" es la "energía por unidad de masa" tal que E=ρeV:

14. ECUACIÓN DE ENERGÍA (2)

- "e" solamente incluye a la energía potencial específica, la energía cinética específica y la energía interna específica.

$$e = \frac{V^2}{2} + gz + \tilde{u}$$

- El trabajo que hace el sistema involucra presión y esfuerzo cortante (para el caso más simple):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW_{presión}}{dt} + \frac{dW_{corte}}{dt} = \int_{sc} p\vec{v}.\overrightarrow{dA} + \frac{dW_{corte}}{dt}$$

- Reemplazando estas expresiones, tendremos:

$$\frac{dQ}{dt} - \left(\int_{sc} p\vec{v}.\overrightarrow{dA} + \frac{dW_{corte}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{vc} \rho e dV + \int_{sc} \rho e\vec{v}.\overrightarrow{dA}$$

14. ECUACIÓN DE ENERGÍA (3)

- De esta manera concluimos que:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt}-\frac{dW_{corte}}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\rho\left(\frac{v^2}{2}+gz+u\right)dV+\int_{sc}\left(\frac{v^2}{2}+gz+u+\frac{p}{\rho}\right)\rho\vec{v}.\overrightarrow{dA}}$$

- Para **un flujo incompresible** y asumiendo que el trabajo de corte es "cero":

$$0=\rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{vc}\left(\frac{v^2}{2}+gz\right)dV+\rho\int_{sc}\left(\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\vec{v}.\overrightarrow{dA}+p\acute{e}rdidas$$

donde Q y u han sido considerados dentro del término "pérdidas"

- Integrando:

$$0=\left(\frac{v^2}{2}+gz\right)\frac{\partial(\rho V)_1^2}{\partial t}+\left[\rho vA\left(\frac{v^2}{2}+gz+\frac{p}{\rho}\right)\right]_1^2+p\acute{e}rdidas$$

14. ECUACIÓN DE ENERGÍA (4)

- Para un **flujo permanente**, el primer término se anula y se obtiene:

$$\rho_1 v_1 A_1\left(\frac{v_1^{\;2}}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}\right)=\rho_2 v_2 A_2\left(\frac{v_2^{\;2}}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}\right)+pérdidas$$

donde Q y u han sido considerados como “pérdidas”

- **Para un caudal y densidades constantes**:

$$\frac{v_1^{\;2}}{2}+gz_1+\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{v_2^{\;2}}{2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho_2}+pérdidas$$

o

$$\boxed{\frac{v_1^{\;2}}{2g}+z_1+\frac{p_1}{\gamma_1}=\frac{v_2^{\;2}}{2g}+z_2+\frac{p_2}{\gamma_2}+pérdidas}$$

14. ECUACIÓN DE ENERGÍA (5)

- Si el **flujo es continuo pero no uniforme**, se debe ingresar un factor de corrección a las velocidades:

$$\alpha = \frac{\int V^3 dA}{\overline{V}^3 A}$$

y la ecuación de energía será:

$$\boxed{\alpha_1 \frac{v_1^{\,2}}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma_1} = \alpha_2 \frac{v_2^{\,2}}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma_2} + p\acute{e}rdidas}$$

15. ECUACIÓN DE MOMENTUM (1)

- De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{D}{Dt}\int_{\text{sys}} \rho \mathbf{V}\, d\forall$$

- La rapidez en la variación de la cantidad de movimiento (dentro del volumen y a través de la superficie de control) será:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt}\int_{\text{c.v.}} \rho \mathbf{V}\, d\forall + \int_{\text{c.s.}} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\hat{\mathbf{n}})\, dA$$

- Para un flujo permanente, si el volumen de control tiene un número pequeño de entradas y salidas, la expresión anterior se simplifica:

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} \rho_i A_i \mathbf{V}_i(\mathbf{V}_i\cdot\hat{\mathbf{n}})}$$

15. ECUACIÓN DE MOMENTUM (2)

- Si el flujo posee una distribución de velocidades que no permite asumir un flujo uniforme, debemos incluir un factor de corrección:

$$\beta = \frac{\int V^2 \, dA}{\overline{V}^2 A}$$

- De esta manera podemos escribir:

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = \dot{m}(\beta_2 \mathbf{V}_2 - \beta_1 \mathbf{V}_1)}$$

EJERCICIO 1

Demostrar que en una tubería de diámetro D con régimen laminar, cuya ecuación de distribución de velocidades es

$$V_h = \frac{gS}{\nu}\left(\frac{Dh}{4} - \frac{h^2}{4}\right)$$

siendo h la distancia al contorno, ν la viscosidad cinemática del fluido y S la pendiente de la línea de energía; se cumple que

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 4/3$$

EJERCICIO 2

Demostrar que en una tubería cuyo radio es r y cuya distribución de velocidades es

$$V_h = 1{,}23V\left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{1}{7}}$$

se cumple que α = 1,07. Hallar el valor de β .