ECUACIONES DINÁMICAS

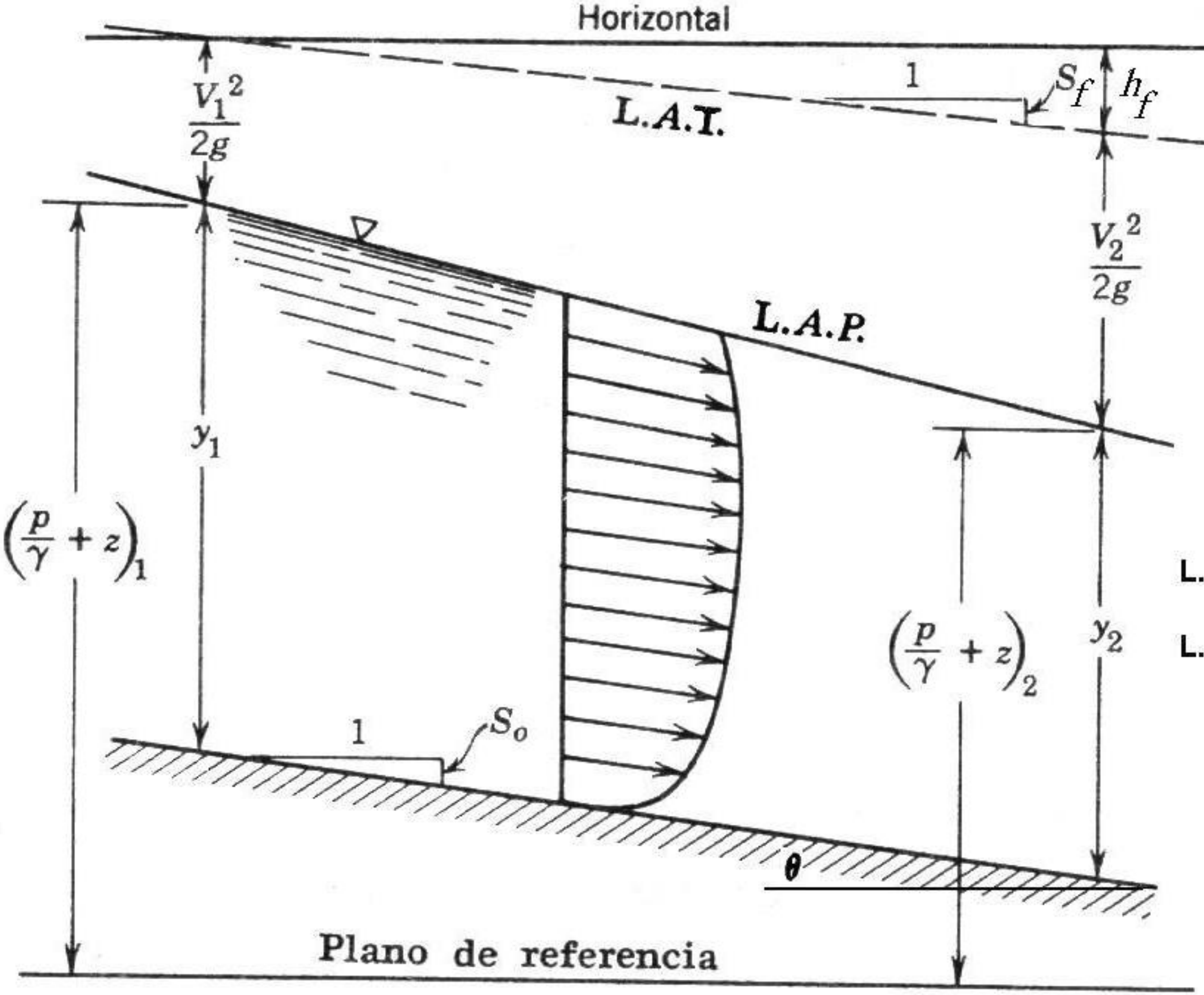
Flujo en Superficie Libre

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

1. FLUJO A SUPERFICIE LIBRE (1)

- Presenta una superficie del líquido en contacto con la atmósfera, llamada superficie libre.
- Las variaciones de presión generalmente se pueden determinar por los principios de la hidrostática, ya que las líneas de corrientes son rectas paralelas y aproximadamente horizontales en canales de baja pendiente ($S_0 < 10\%$, $< 6°$).
- La superficie libre coincide con la línea piezométrica.
- El flujo puede ser permanente o no permanente; uniforme o variado; acelerado o retardado; subcrítico o supercrítico.
- Cuando el fluido es agua a temperatura ambiente, el régimen de flujo es usualmente turbulento.

1. FLUJO A SUPERFICIE LIBRE (2)



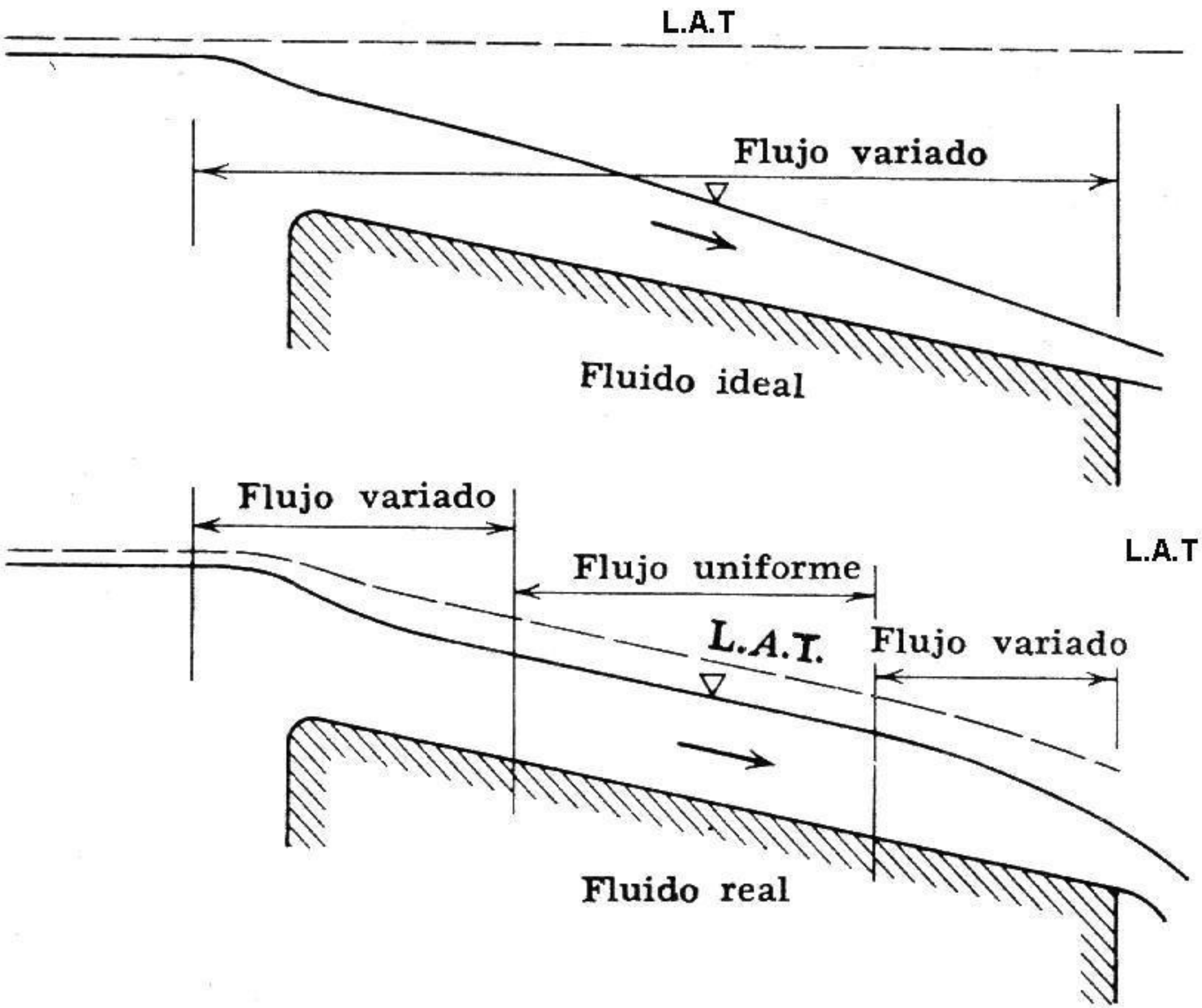
L.A.T	**Línea de alturas totales, o línea de energía**
L.A.P	**Línea de alturas piezométricas**

2. FLUJO IDEAL Y FLUJO REAL (1)

- El flujo ideal no tiene resistencia en la superficie y por efecto de la aceleración de la gravedad, aumenta constantemente su velocidad con la consecuente reducción de su profundidad (flujo variado).

- En el flujo real existen fuerzas de resistencia por efecto de la viscosidad y de la rugosidad del canal que **para ciertos valores de la velocidad** del fluido **equilibran las fuerzas de gravedad**, presentándose un flujo con velocidad y geometría constante denominado flujo uniforme.

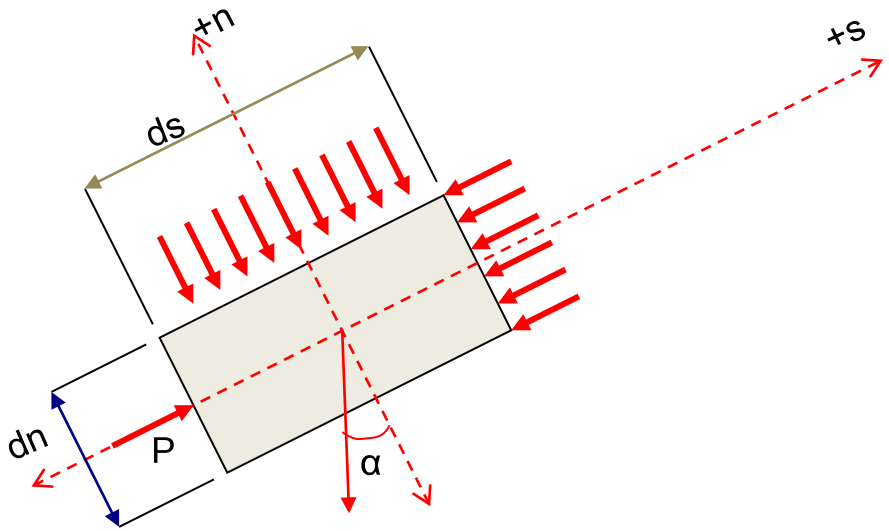
2. FLUJO IDEAL Y FLUJO REAL (2)



L.A.T Línea de alturas totales, o línea de energía

3. FLUJO IDEAL (1)

- En un fluido ideal no hay resistencia al movimiento. Haciendo un análisis de fuerzas:



$$W = \gamma ds dn$$

$$Sen\alpha = \frac{dz}{ds}; \quad Cos\alpha = \frac{dz}{dn}$$

- Las fuerzas en la dirección del flujo "s":

$$pdn - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} ds \right) dn - WSen\alpha = \rho ds dn \frac{\partial V}{\partial t}\bigg|_s \quad \ldots(1)$$

3. FLUJO IDEAL (2)

- Por definición, la aceleración:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_s = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s\frac{\partial V_s}{\partial s} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}V_s^{\ 2}\right)}{\partial s}$$

- Reemplazando en (1) y simplificando:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\frac{V_s^{\ 2}}{g}\right)}{\partial s} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial s} - \frac{\partial Z}{\partial s}$$

- Ordenando y agrupando:

$$-\frac{1}{g}\frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{P}{\gamma} + Z + \frac{V_s^{\ 2}}{2g}\right) \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{g}\frac{\partial V_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}H \ldots(2)}$$

3. FLUJO IDEAL (3)

donde H se conoce como “carga” o “energía total”.

- La suma $Z + \frac{P}{\gamma} = h$ se conoce como carga piezométrica.
- Si en la ecuación (2), la variación de H= 0, decimos que estamos en un flujo permanente (la energía no varía en el tiempo).
- De igual forma, las fuerzas en la dirección perpendicular al flujo “n”:

$$pds - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} dn \right) ds - WCos\alpha = \rho dsdn \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_n \text{...(3)}$$

- La aceleración:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_n = \frac{\partial V_n}{\partial t} + V_n \frac{\partial V_n}{\partial n}$$

3. FLUJO IDEAL (4)

- Reemplazando en (3) y simplificando:

$$\frac{1}{g}\left(\frac{\partial V_n}{\partial t}-\frac{V_s{}^2}{n}\right)=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial P}{\partial n}-\frac{\partial Z}{\partial n}$$

$$\boxed{\frac{1}{g}\left(\frac{\partial V_n}{\partial t}-\frac{V_s{}^2}{n}\right)=-\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{P}{\gamma}+Z\right)\ldots(4)}$$

- Sumando a cada lado $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V_s{}^2}{2g}\right)$, y **asumiendo que el flujo es permanente:**

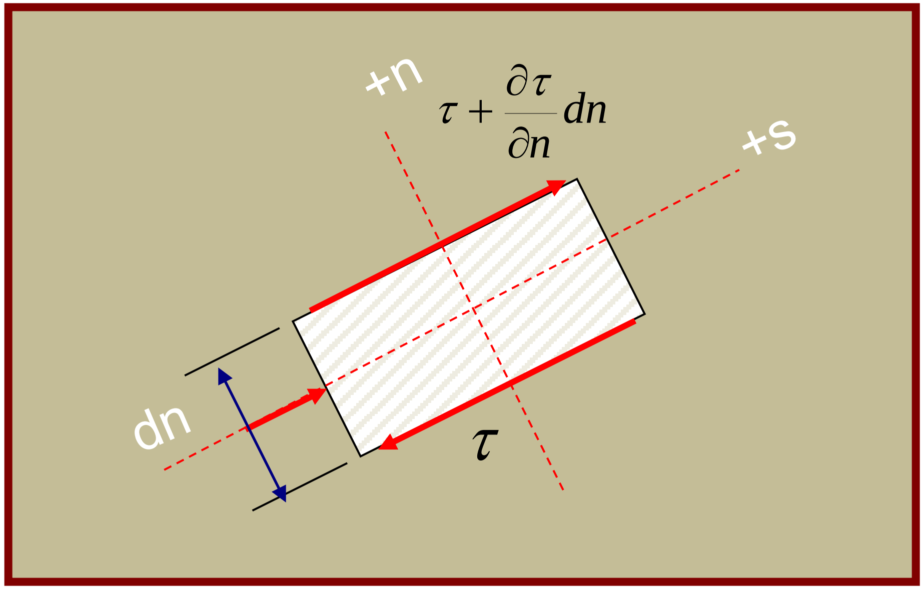
$$\frac{1}{g}\frac{V_s{}^2}{n}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V_s{}^2}{2g}\right)=\frac{\partial}{\partial n}(H)=0$$

$$\frac{V_s{}^2}{gn}+V_s\frac{\partial V_s}{\partial n}\left(\frac{1}{g}\right)=0\rightarrow r\partial V_s+V\partial r=0$$

que es la ecuación de un vórtice libre

4. FLUJO REAL (VISCOSO) (1)

- La acción de la gravedad y el contacto del fluido con la parte inferior y las paredes laterales del cauce conduce a considerar un efecto de resistencia al flujo, que en primera instancia puede considerarse como un esfuerzo de corte



4. FLUJO REAL (VISCOSO) (2)

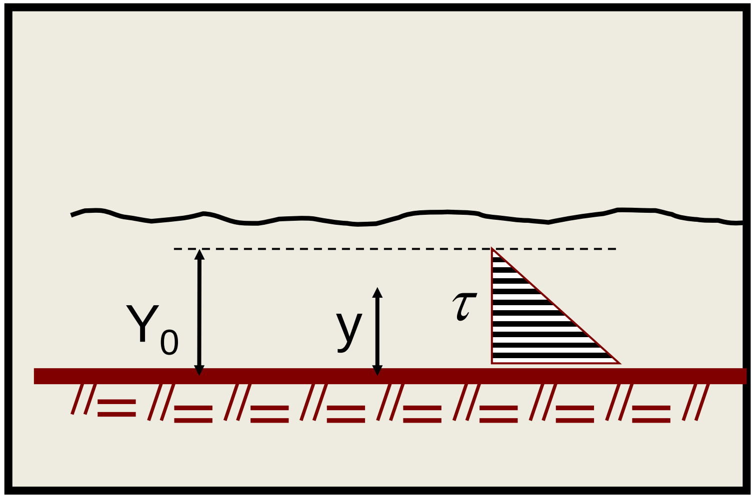
- Para un **flujo permanente** y unidireccional

$$\rho V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} = -\frac{\partial P}{\partial s} - \gamma \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial n}, \qquad \text{o} \qquad \gamma \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V_s{}^2}{g} + \frac{P}{\gamma} + Z\right) = \frac{\partial \tau}{\partial n}$$

$$\boxed{\frac{\partial \tau}{\partial n} = \gamma \frac{\partial H}{\partial s}}$$

- Para un canal sin perturbaciones en las paredes (n=y), la distribución del esfuerzo de corte para variaciones pequeñas de la velocidad es:

$$\boxed{\frac{\partial \tau}{\partial y} = \gamma \frac{\partial H}{\partial x}}$$



4. FLUJO REAL (VISCOSO) (3)

Por definición, la gradiente de energía es: $\frac{\partial H}{\partial x} = -S$

por tanto, se tiene:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\gamma S$$

Si la pendiente es constante, integrando:

$$\tau = \gamma S(y_0 - y)$$

En el fondo del canal en donde y=0

$$\tau_0 = \gamma S y_0$$

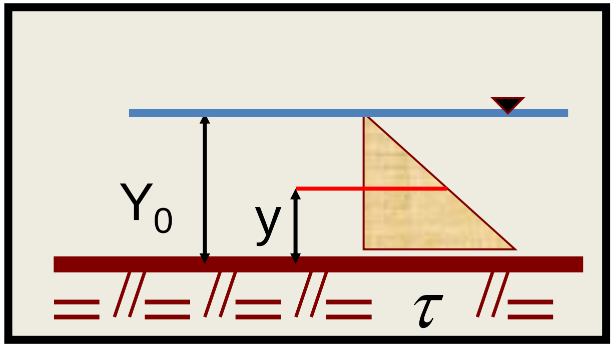
En forma adimensional

$$\boxed{\frac{\tau}{\tau_0} = 1 - \frac{y}{y_0}}$$

Valido para flujo laminar y turbulento

4. FLUJO REAL (VISCOSO) (4)

- **Para el flujo laminar**, el esfuerzo de corte se estima usando la ec. de viscosidad de Newton:



$$\tau = \mu \frac{dV}{dy}$$

- Reemplazando la ec. adimensional hallada:

$$dV = \frac{\tau_0}{\mu}\left(1 - \frac{y}{y_0}\right)dy \Rightarrow \boxed{V = \frac{\tau_0}{\mu}\left(y - \frac{y^2}{2y_0}\right) + C}$$

- Para condiciones de contorno (y=0, V=0), se obtiene C=0:

$$\boxed{V = \frac{\tau_0}{\mu}\left(y - \frac{y^2}{2y_0}\right)}$$

4. FLUJO REAL (VISCOSO) (5)

- Si introducimos la densidad, la ecuación se convierte en:

$$V = \frac{(\tau_0 / \rho)}{(\mu / \rho)} \left(y - \frac{y^2}{2y_0} \right)$$

- Introduciendo la velocidad de corte $V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ se tiene:

$$V = \frac{V_*^{\,2}}{\upsilon} \left(y - \frac{y^2}{2y_0} \right)$$

- Ordenando:

$$\frac{V}{V_*} = \frac{V_* y_0}{\upsilon} \frac{y}{y_0} \left(1 - \frac{y}{2y_0} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{V}{V_*} = \mathrm{Re}_* \frac{y}{y_0} \left(1 - \frac{y}{2y_0} \right)}$$

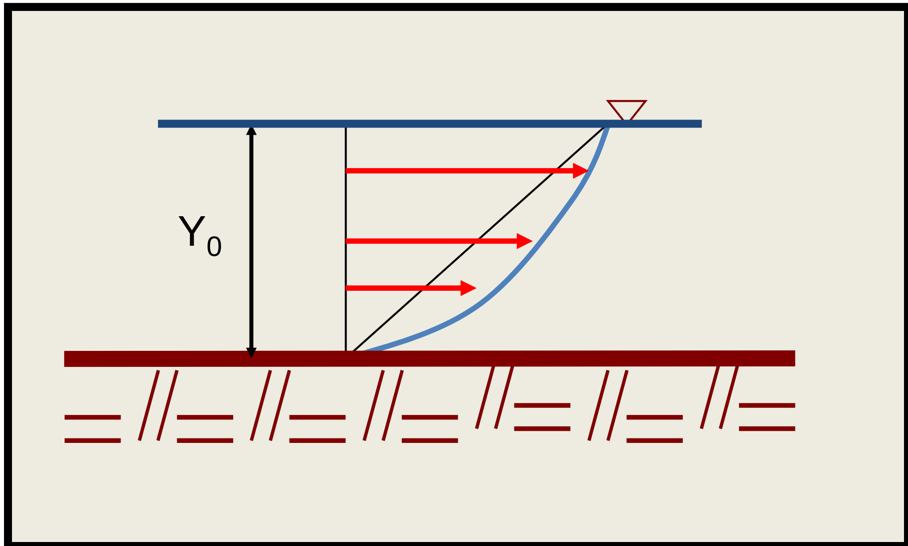
4. FLUJO REAL (VISCOSO) (6)

- La ecuación obtenida indica que la distribución de velocidades en un flujo bidimensional laminar tiene forma de parábola. Para esta distribución, la velocidad máxima ocurre en la superficie (y=yo):

$$\frac{V_{max}}{V_*} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}_*$$

- La distribución de velocidades puede escribirse en función de la velocidad máxima:

$$\boxed{\frac{V}{V_{max}} = \frac{y}{y_0}\left(2 - \frac{y}{y_0}\right)}$$



4. FLUJO REAL (VISCOSO) (7)

- La velocidad media por definición es:

$$V_m = \frac{\int V.dA}{A}$$

- Para un ancho unitario, se verifica que la relación de la velocidad media a la velocidad máxima es:

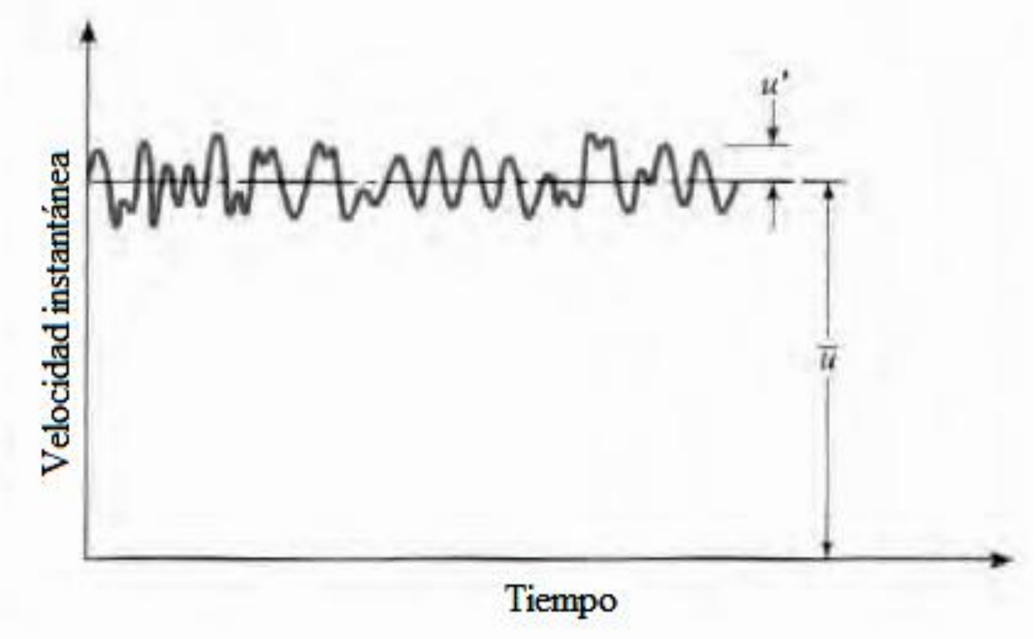
$$\frac{V_m}{V_{\max}} = \frac{2}{3}$$

que se ubica aproximadamente a $0.42y_0$.

4. FLUJO REAL (VISCOSO) (8)

- **Para el flujo turbulento**, la acción de mezcla de la turbulencia hace que pequeñas masas de fluido sean barridas hacia atrás y adelante en una dirección transversal a la dirección media del flujo.

- Este proceso hace que las velocidades en un punto dado fluctúen alrededor de un valor medio.



4. FLUJO REAL (VISCOSO) (9)

- Luego, la velocidad está compuesta de dos partes: un valor medio, u, y una parte fluctuante, u'. La parte fluctuante de la velocidad es responsable de la mezcla y el intercambio de momento, que se manifiesta con efectos similares a un esfuerzo de corte, definiendo un "esfuerzo de corte aparente":

$$\tau_{app} = -\rho \overline{u'v'}$$

  donde u' y v' son los componentes promedio x e y de las fluctuaciones de velocidad durante un período de tiempo.

- Prandlt asume que la velocidad u' es proporcional a una longitud de mezcla ℓ, tal que:

$$u' \approx \ell \frac{du}{dy}$$

4. FLUJO REAL (VISCOSO) (10)

- Asumiendo que u'=v', se concluye que:

$$\boxed{\tau_{app} = -\rho\overline{u'v'} = \rho\ell^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2}$$

- Ya que la ecuación de viscosidad de Newton puede re-escribirse como:

$$\tau = \rho\upsilon\frac{dV}{dy}$$

igualando ambas expresiones, se define la "viscosidad cinemática de turbulencia" como:

$$\boxed{\upsilon_t = \ell^2\frac{dV}{dy}}$$