MSc. Ing. Juan W. Cabrera

Mecánica de Fluidos Avanzada

CINEMÁTICA

Mecánica de Fluidos Avanzada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

CAMPO DE FLUJO

- Es cualquier región en el espacio donde hay un fluido en movimiento, a condición de que la región este ocupada por el fluido.

- Esto permite asignar a cada punto del campo de fluido una serie de magnitudes físicas (escalares, vectoriales o tensoriales), que forman a su vez campos independientes o dependientes dentro del flujo. Cada uno de estos campos independientes (velocidad, aceleración, presión, densidad, etc) quedan definidos por una **función**.

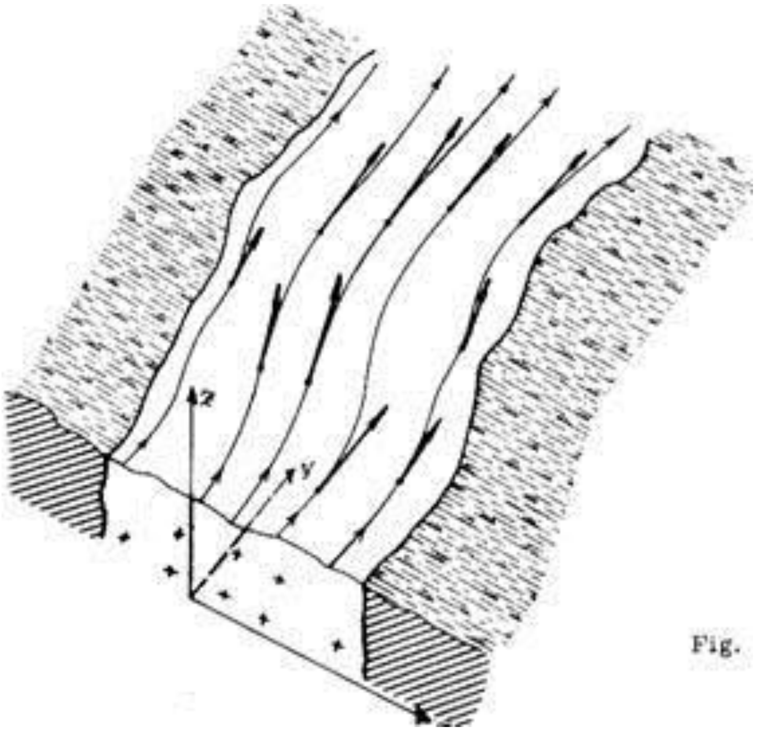


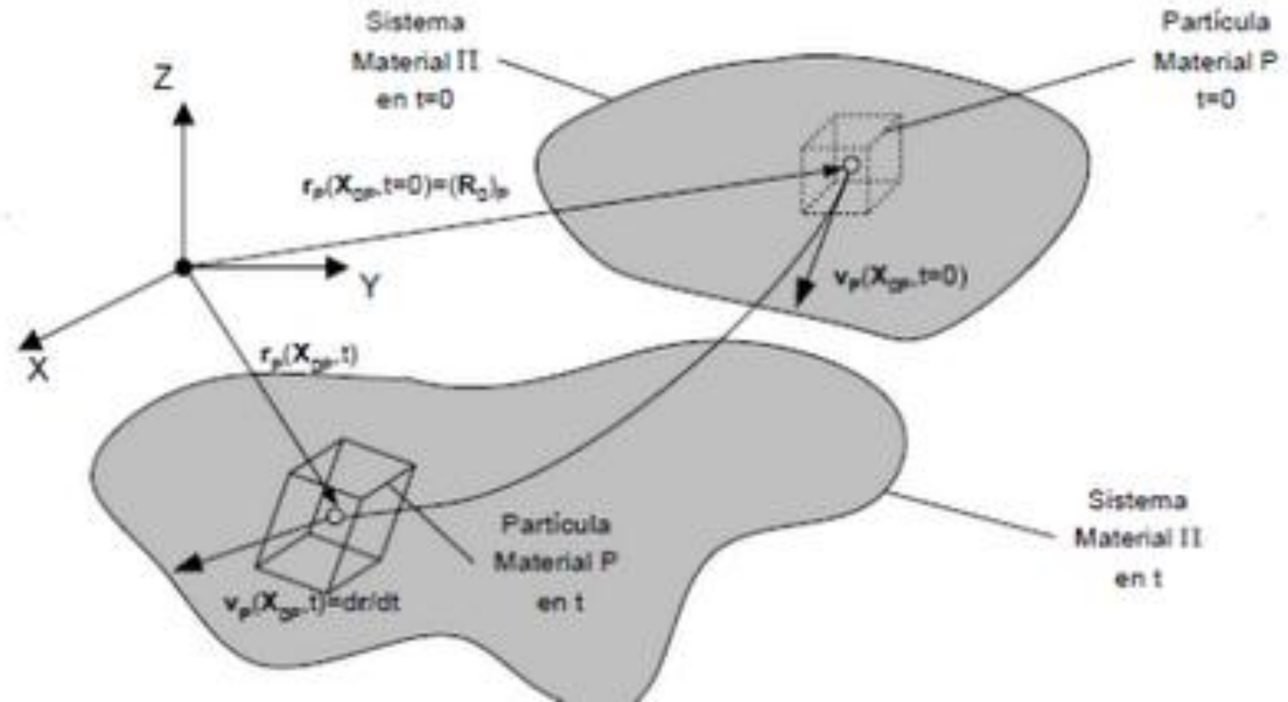
Fig.

DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA Y EULERIANA (1)

- El movimiento de un sólido se analiza respecto al centro de la masa, y queda definido por tres posiciones y tres ángulos (**descripción lagrangiana**) para cada instante de tiempo. Ya que un fluido es deformable, el análisis se realiza subdividiendo el fluido en un gran número, N, de partículas y aplicando la descripción lagrangiana para cada una de ellas.

$$\bar{X}\left(\bar{X}_0, t\right)$$

donde X_0 es la posición de la partícula de fluido en un instante t_0



DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA Y EULERIANA (2)

- La velocidad lagrangiana queda definida como:

$$\bar{V} = \left.\frac{d\bar{X}}{dt}\right|_{\substack{\text{Partícula}\\ \text{simple}}}$$

- Evaluar de esta forma a todas las partículas es complicado; es más simple asignar a cada punto R en el espacio una velocidad para un tiempo t (**descripción euleriana**).

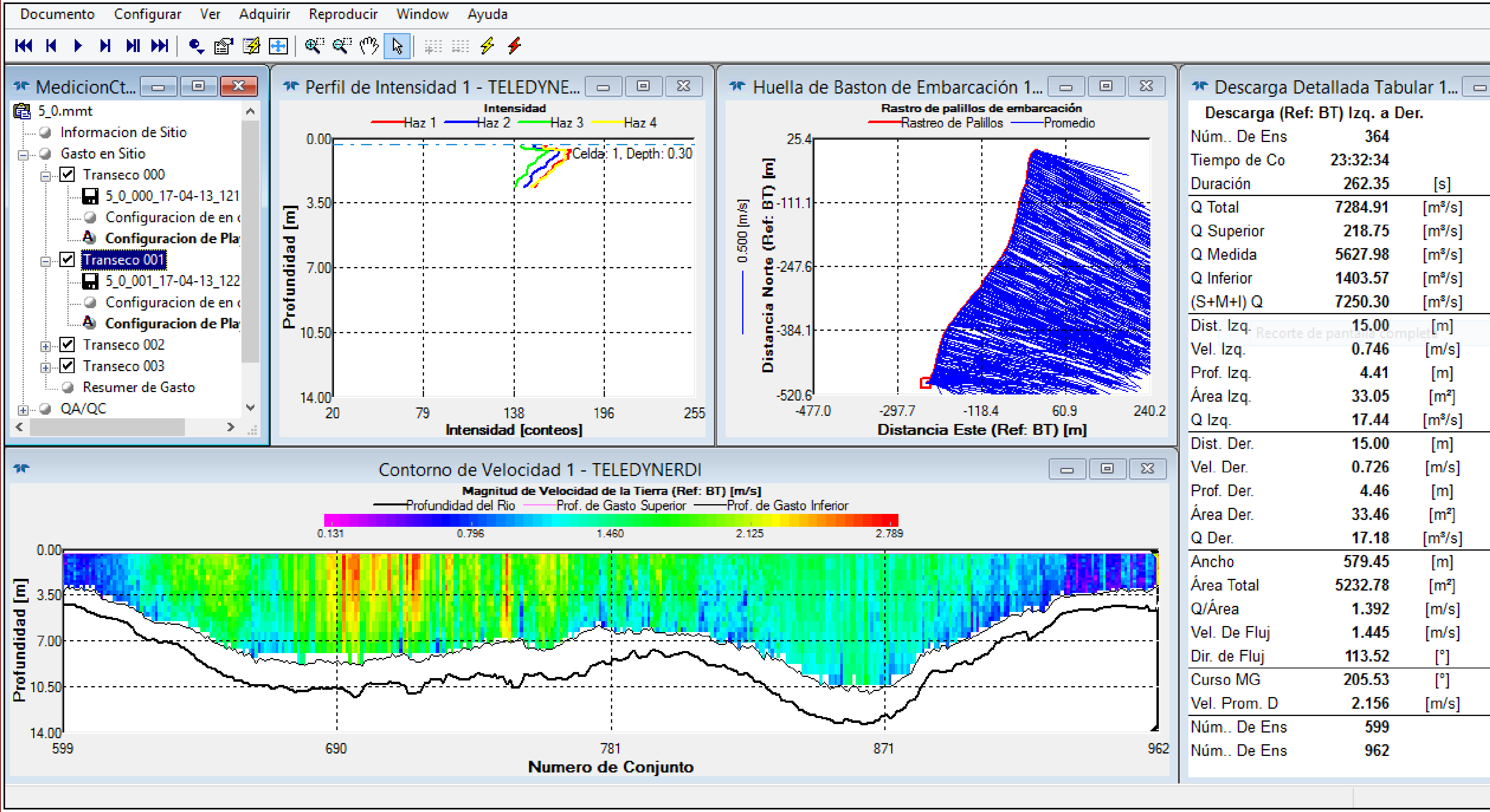
- Una descripción euleriano del campo de flujo consiste en especificar la velocidad V como una función de la posición R y el tiempo t:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}\{\mathbf{R}, t\}$$

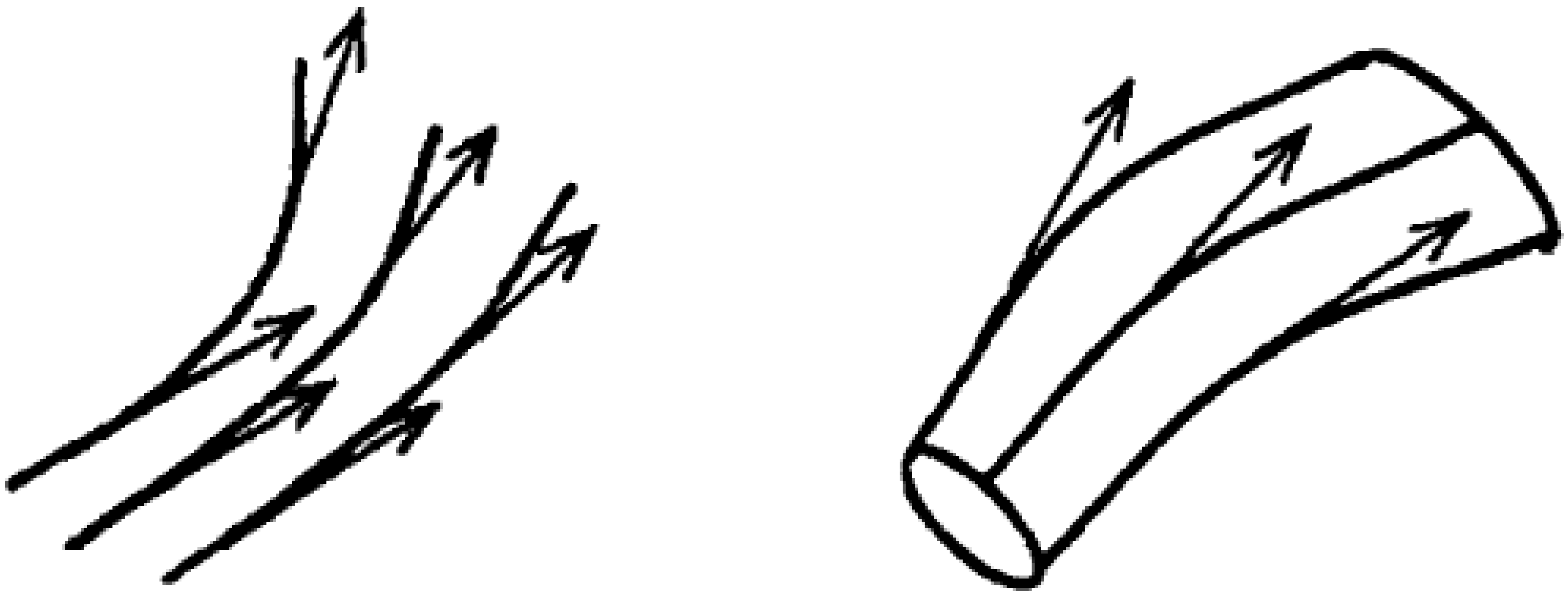
donde

$$\mathbf{R} \equiv x\,\mathbf{i}_x + y\,\mathbf{i}_y + z\,\mathbf{i}_z = r\,\mathbf{i}_r + z\,\mathbf{i}_z$$

- Esta descripción se llama “descripción de campo” y las variables que se ajustan a ella son las “variables de campo”.


Documento Configurar Ver Adquirir Reproducir Window Ayuda
MedicionCt...
5_0.mmt
Informacion de Sitio
Gasto en Sitio
Transeco 000
5_0_000_17-04-13_121
Configuracion de en
Configuracion de Pla
Transeco 001
5_0_001_17-04-13_122
Configuracion de en
Configuracion de Pla
Transeco 002
Transeco 003
Resumer de Gasto
QA/QC
Perfil de Intensidad 1 - TELEDYNE...
Intensidad
Haz 1 Haz 2 Haz 3 Haz 4
Celda: 1, Depth: 0.30
Profundidad [m]
Intensidad [conteos]
0.00 3.50 7.00 10.50 14.00
20 79 138 196 255
Huella de Baston de Embarcación 1...
Rastro de palillos de embarcación
Rastreo de Palillos Promedio
0.500 [m/s]
Distancia Norte (Ref: BT) [m]
25.4 -111.1 -247.6 -384.1 -520.6
-477.0 -297.7 -118.4 60.9 240.2
Distancia Este (Ref: BT) [m]
Descarga Detallada Tabular 1...
Descarga (Ref: BT) Izq. a Der.
Núm.. De Ens 364
Tiempo de Co 23:32:34
Duración 262.35 [s]
Q Total 7284.91 [m³/s]
Q Superior 218.75 [m³/s]
Q Medida 5627.98 [m³/s]
Q Inferior 1403.57 [m³/s]
(S+M+I) Q 7250.30 [m³/s]
Dist. Izq. 15.00 [m]
Vel. Izq. 0.746 [m/s]
Prof. Izq. 4.41 [m]
Área Izq. 33.05 [m²]
Q Izq. 17.44 [m³/s]
Dist. Der. 15.00 [m]
Vel. Der. 0.726 [m/s]
Prof. Der. 4.46 [m]
Área Der. 33.46 [m²]
Q Der. 17.18 [m³/s]
Ancho 579.45 [m]
Área Total 5232.78 [m²]
Q/Área 1.392 [m/s]
Vel. De Fluj 1.445 [m/s]
Dir. de Fluj 113.52 [°]
Curso MG 205.53 [°]
Vel. Prom. D 2.156 [m/s]
Núm.. De Ens 599
Núm.. De Ens 962
Contorno de Velocidad 1 - TELEDYNERDI
Magnitud de Velocidad de la Tierra (Ref: BT) [m/s]
Profundidad del Rio Prof. de Gasto Superior Prof. de Gasto Inferior
0.131 0.796 1.460 2.125 2.789
Profundidad [m]
0.00 3.50 7.00 10.50 14.00
599 690 781 871 962
Numero de Conjunto

LINEAS DE CORRIENTE Y DE TRAYECTORIA (1)



$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0$$

DERIVADA SUSTANCIAL (1)

- Las formas estándar de la ley del movimiento de Newton y las leyes de la termodinámica se aplican a una masa fija de materia cuyas propiedades cambian a medida en el tiempo. El modo natural de expresar estas leyes es la descripción Lagrangiana.

- Debido al uso de la descripción euleriana para un fluido en movimiento, es necesario establecer una expresión euleriana para la tasa de cambio de cualquier propiedad de una partícula de fluido que se mueve a través del campo de flujo.

- **La velocidad de variación de una propiedad del fluido, medida por un observador en movimiento con la partícula, es llamada derivada sustancial de esa propiedad.**

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{D}{Dt} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\right)$$

DERIVADA SUSTANCIAL (2)

- La derivada sustancial escrita en los sistemas cilíndrico y esférico es:

Cartesian

$$\frac{D}{Dt} = u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Cylindrical

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + v_z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Spherical

$$\frac{D}{Dt} = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial t}$$

EJERCICIO

- Un campo de velocidad y campo de densidad en el espacio cartesiano se da como:

$$\mathbf{V} = \frac{L}{t}\mathbf{i}_x$$

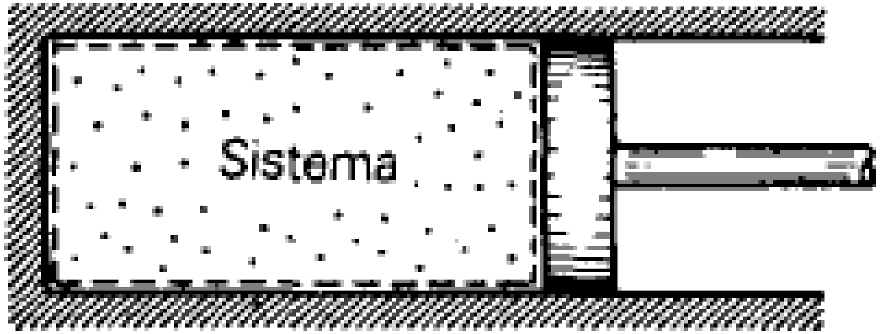
$$\rho = Kte^{-x/L}$$

donde L y K son constantes que tienen dimensiones de longitud y densidad divididos por el tiempo, respectivamente. Encuentra la derivada material de la densidad ρ.

CLASIFICACIÓN DE FLUJOS

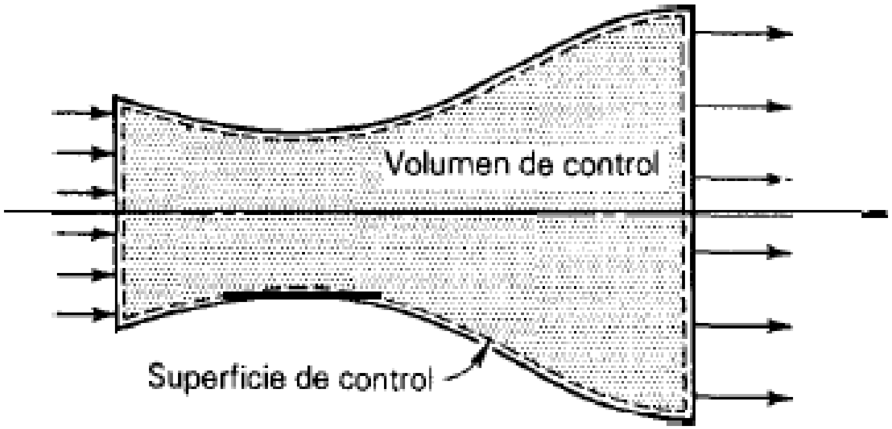
- Flujo Permanente y no permanente
- Flujo Cuasi permanente.
- Dimensionalidad del flujo: uni, bi, tri dimensionales.
- Flujo axisimétrico.

VOLUMEN Y SUPERFICIE DE CONTROL



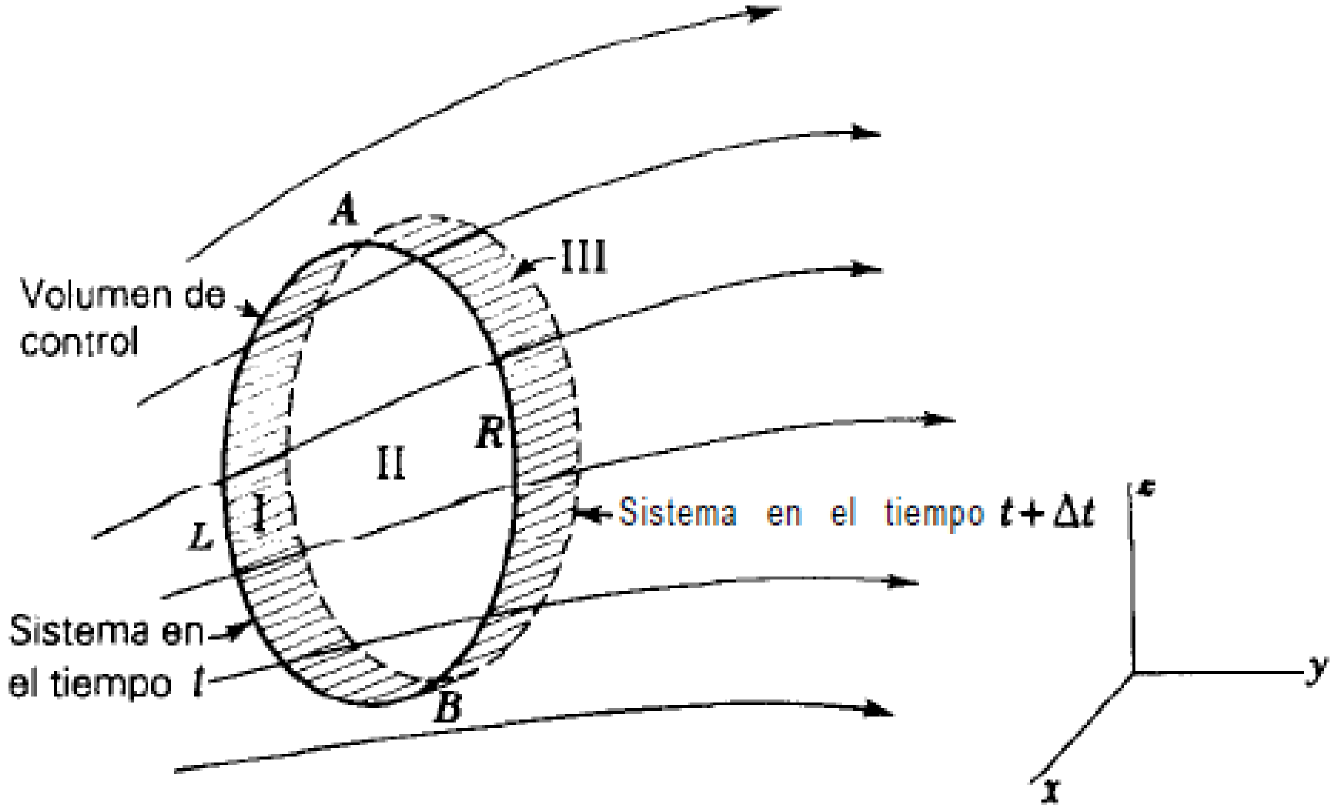
Si cogemos una porción de fluido para analizar las fuerzas o fenómenos que actúan sobre él, estaremos definiendo un SISTEMA.

Si elegimos un volumen en el espacio, este se conoce con el nombre de ***volumen de control,*** y la frontera de este volumen se conoce como ***superficie de control.***



RELACIÓN ENTRE SISTEMA Y VC (1)

Dados un sistema fluido de masa finita y un volumen de control de manera tal que, para un instante “t”, ambos coinciden.



RELACIÓN ENTRE SISTEMA Y VC (2)

- Para una propiedad extensiva N del fluido, su distribución por unidad de masa será ***n***, de manera que N = $\iiint \eta\rho \, dV$, donde dV representa un elemento de volumen.

- Si el sistema de desplaza durante un tiempo dt,

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\text{sistema}} = \frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint\limits_{\text{III}} \eta\rho\, dv + \iiint\limits_{\text{II}} \eta\rho\, dv\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint\limits_{\text{I}} \eta\rho\, dv + \iiint\limits_{\text{II}} \eta\rho\, dv\right)_{t}}{\Delta t}\right]$$

- Ordenando:

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint\limits_{\text{II}} \eta\rho\, dv\right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint\limits_{\text{II}} \eta\rho\, dv\right)_{t}}{\mathrm{At}}\right] + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\left(\iiint\limits_{\text{III}} \eta\rho\, dv\right)_{t+\Delta t}}{\mathrm{At}}\right] - \lim_{\mathrm{At\text{-}10}}\left|\frac{\left(\iiint\limits_{\text{I}} \eta\rho\, dv\right)_{t}}{\mathrm{At}}\right|$$

RELACIÓN ENTRE SISTEMA Y VC (3)

- El primer término es una derivada parcial respecto a "t":

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\left(\iiint_{\mathrm{II}} \eta\rho \, dv \right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_{\mathrm{II}} \eta\rho \, dv \right)_{t}}{\Delta t} \right| = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \eta\rho \, dv$$

- El segundo término representa el monto de N que ha atravesado el volumen de control.

- El tercer término representa el monto de N que ha entrado al volumen de control.

- La diferencia entre el monto que entra y el que sale representa el "flujo neto de salida" de N a través del volumen de control.

RELACIÓN ENTRE SISTEMA Y VC (4)

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\left(\iiint_{\mathrm{III}} \eta\rho\, dv \right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right| - \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\left(\iiint_{\mathrm{I}} \eta\rho\, dv \right)_{t}}{\Delta t} \right| = \text{Tasa neta de flujo de salida de N a través del } VC.$$

- Esta tasa de flujo de salida neto puede escribirse también como:

$$\text{Tasa neta de flujo de salida de N desde VC} = \iint_{ARB} \eta(\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) - \left[- \iint_{ALB} \eta(\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) \right]$$

$$\text{Tasa neta de flujo de salida de N desde VC} = \oiint_{SC} \eta(\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA})$$

- Luego, la expresión inicial puede escribirse como:

$$\frac{DN}{Dt} = \oiint_{SC} \eta(\rho\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \eta\rho\, dv$$

- que se conoce como ecuación de transporte de Reynolds,

FLUJO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE DE CONTROL (1)

- Para un elemento dS de una superficie de control, el líquido que se encuentra dentro se desplaza una distancia Vdt.

- Este fluido barre un volumen en forma de cilindro de base dS y altura inclinada Vdt.

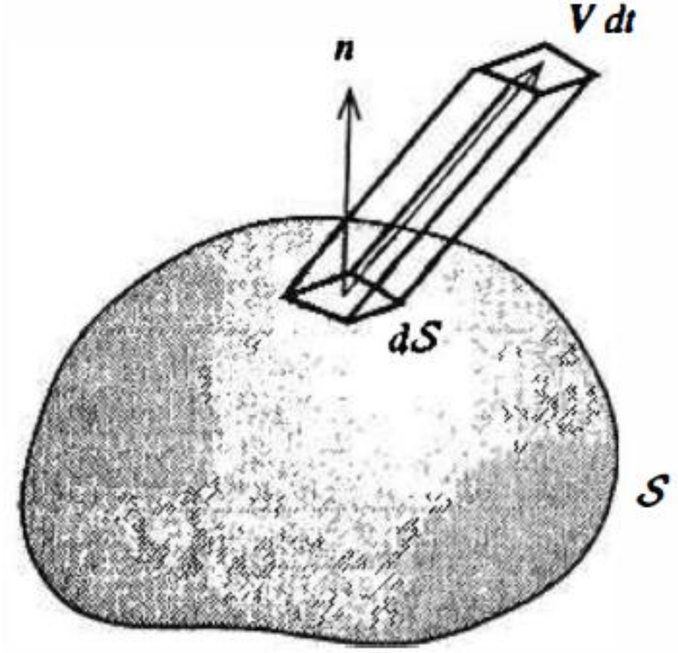
- Luego:

$$dQ \equiv \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$Q \equiv \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

- La masa que circula es:

$$dm = \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS\, dt.$$



FLUJO A TRAVÉS DE UNA SUPERFICIE DE CONTROL (2)

- Luego, el flujo másico será:

$$d\dot{m} \equiv \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

$$\dot{m} \equiv \iint \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

- Si la densidad es constante:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \iint \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \rho \iint \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \rho Q \qquad (\rho = constant) \end{aligned}$$

EJERCICIO

- Un fluido que fluye de forma constante en un tubo circular de radio ***a*** tiene una velocidad ***V*** que es paralela al eje del tubo (eje z), que tiene un valor máximo U en el centro y que es cero en la pared de la tubería:

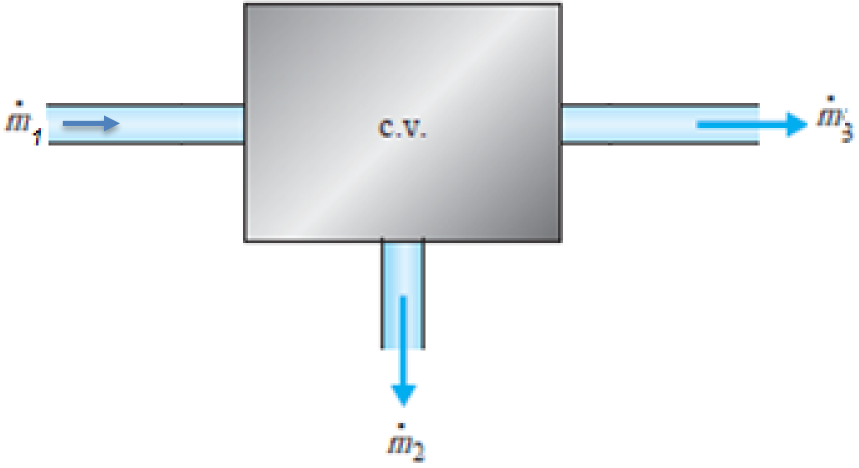
$$\mathbf{V} = U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{i}_z$$

donde ***r*** es la distancia radial desde el eje de la tubería. Deducir una expresión para la velocidad de flujo de volumen Q en la tubería.

CONSERVACIÓN DE LA MASA (1)

FORMA INTEGRAL

- Dado un volumen de control:



- Aplicando la Ecuación de Transporte de Reynolds:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho \overline{V}.\overline{dA} = 0$$

CONSERVACIÓN DE LA MASA (2)

- Para un flujo permanente y sustancia homogénea, se obtiene:

$$\oiint_{SC} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{dA}) = 0$$

¡la conservación de la masa se reduce a la “conservación de volumen”!

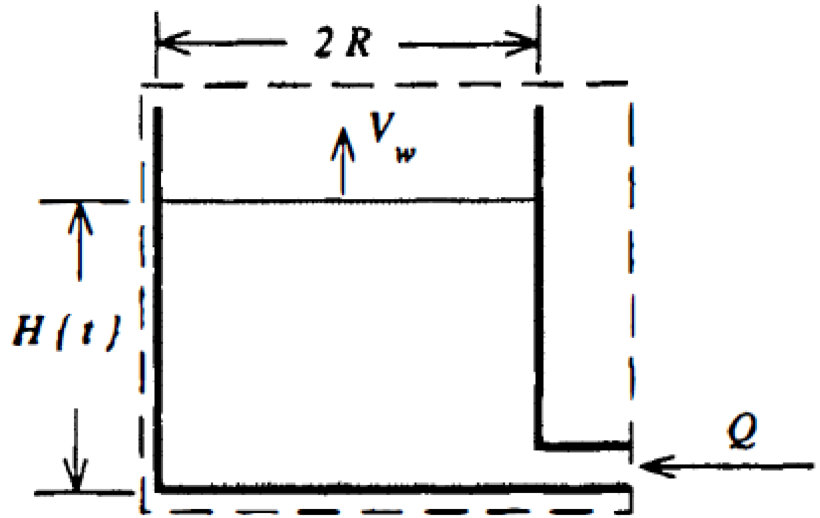
- Si es que la conservación de la masa no se cumple, entonces existirá una variación del volumen dentro del volumen de control y la expresión inicial se escribirá como:

$$\oiint (\rho V.dA) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_{VC} \rho d\forall \right)$$

$$\oiint (\rho V.dA) = -\frac{\partial m}{\partial t}$$

EJERCICIO

Un tanque cilíndrico de radio R = 1m se está llenando de agua por una bomba. El eje tanque es vertical, como se muestra en la figura, y se observa el nivel del agua en el tanque de estar aumentando a un ritmo de V_w = 1mm/s. Calcular la tasa de flujo de volumen Q de agua a través de la bomba.



CONSERVACIÓN DE LA MASA (4)

FORMA DIFERENCIAL

- La ecuación de continuidad planteada:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\mathcal{V} + \iint_{S} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0$$

- Aplicando el Teorema de la divergencia:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) d\mathcal{V} = 0$$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V})\right) d\mathcal{V} = 0$$

- Si la integral es nula, entonces la función también lo es:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0}$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

CONSERVACIÓN DE LA MASA (5)

- Desarrollando la expresión:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0$$

de donde:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

- Aplicando el concepto de derivada sustancial:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla \cdot \mathbf{V} = 0}$$

CONSERVACIÓN DE LA MASA (6)

- En coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0$$

EJERCICIO

- El campo de velocidad de cierto fluido es:

$$\mathbf{V} = (x/t)\,\mathbf{i}_x$$

Asumiendo que la densidad depende solamente del tiempo, encuentra una expresión para $\rho(t)$.

FLUJO INCOMPRESIBLE

- Un flujo es **incompresible**, si su derivada sustancial es mucho más pequeña que la divergencia de velocidades:

$$\left|\frac{D\rho}{Dt}\right| \ll \rho\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial w}{\partial z}\right|\right)$$

- Esto conlleva a afirmar que:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \qquad (\textit{incompressible})$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \qquad (\textit{incompressible})$$

- **“La divergencia de la velocidad en un flujo incompresible es cero”.**

- Y por tanto:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$$

EJERCICIO

- Un flujo plano tiene componentes de velocidad u = x/T; v= -y/T y W= 0, donde T es una constante que tiene la dimensión de tiempo. ¿Es incompresible este flujo?

EJERCICIO

La componente x de velocidad está dada por $u(x, y) = Ay^2$ en un flujo plano incompresible. Determine $v(x, y)$ si $v(x, 0) = 0$, como sería en el caso de un flujo entre placas paralelas.

CONSERVACIÓN DE ESPECIES QUÍMICAS (1)

- La concentración de masa de una especie química i (ρ_i), es la masa por unidad de volumen de ese constituyente en una mezcla. La expresión para la conservación de la masa de cualquier componente i, en ausencia de cualquier reacción química que pueda crear o quitarlo, debe ser idéntica a la del fluido en su conjunto, excepto que ρ_i sustituye a ρ:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_i \, d\mathcal{V} + \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

- Considerando que existen varias especies químicas, sumando sus ecuaciones, debe cumplirse la continuidad:

$$\sum_i \frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_i \, d\mathcal{V} + \sum_i \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \sum_i \rho_i \, d\mathcal{V} + \iint_S \sum_i \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \iint_S \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$$

CONSERVACIÓN DE ESPECIES QUÍMICAS (2)

- Asimismo, el flujo másico de las especies i cruzando la superficie de control será:

$$\dot{m}_i \equiv \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

y por tanto concluimos que:

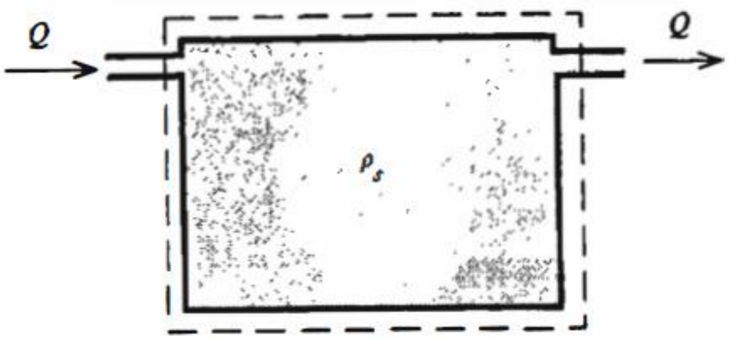
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho_i \, d\mathcal{V} = (\dot{m}_i)_{in} - (\dot{m}_i)_{out}$$

que escrito en forma diferencial es:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}) = 0$$

EJERCICIO

- Un tanque de volumen V = 10m3 está lleno de una solución salina que tiene una densidad inicial ρ_{S0} = 3,0 kg/m^3. En el instante t = 0 el agua dulce se bombea en el tanque a una velocidad de flujo Q = 0.01 m^3/s, desplazando la solución salina a través de un rebose a una tasa igual. El fluido en el tanque se agita bien para que cada ingreso de agua dulce diluya la solución de sal de manera uniforme en todo el tanque.



- (a) Deducir y resolver una ecuación diferencial para la dependencia del tiempo de la densidad de la sal $\rho_S(t)$ en el tanque. (b) Calcular el volumen de agua fresca que debe ser bombeada en el tanque para reducir la concentración de sal en un factor de dos, de su valor inicial ρ_{S0}.

REACCIONES QUÍMICAS

- Cuando una especie química se somete a una reacción química, la ecuación de conservación de la masa para cada una de las especies reaccionantes debe incluir la posibilidad de la producción (o pérdida) de estas especies causadas por la reacción química.

- Para tener en cuenta los efectos de la reacciones químicas, incluimos un término en el lado derecho de la ecuación de continuidad para permitir la producción de la especie i por la reacción química

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \rho_i \, d\mathcal{V} + \iint_S \rho_i \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t}\right)_{chem} d\mathcal{V}}$$

- Escrito en forma diferencial:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}) = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial t}\right)_{chem}}$$

FLUJOS EN DOS O MAS FASES

- Un flujo es bifásico o multifásico cuando está compuesto por dos o más fases bien diferenciadas, es decir, cuando está compuesto por sustancias que pueden separarse mecánicamente.

- Para analizar este tipo de sustancia, puede encontrarse una densidad o peso específico de mezcla o puede analizarse cada fase de forma independiente.

- Si cada fase se analiza de forma independiente, en cada una de ellas debe cumplirse que:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{V}_i) = 0$$

EJERCICIO

Sobre el techo de una casa, el cual tiene una inclinación que forma un ángulo $\theta = 60°$ respecto de la vertical, cae la lluvia según se ilustra en la figura P 3.4. El gasto másico de lluvia *por unidad de área horizontal* es $m = 1E(-3)\ kg/m^2 s$. En el techo se forma una película delgada de agua, la cual fluye paralela a la superficie del techo en dirección del eje x, como lo indica la figura 3.4. La rapidez del flujo V en el agua es uniforme a lo largo del espesor h de la película y sólo depende de la distancia vertical z medida desde la punta del techo y varía según:

$$V = kz$$

donde k es una constante cuyo valor es $1E(-3)\ s^{-1}$.

(a) Demuestre que en un flujo estacionario el espesor h de la película no depende de la distancia x y determine su valor. (b) Si la lluvia comienza a caer al tiempo $t = 0$ a una razón constante de m cuando el techo está seco, deduzca y resuelva una ecuación diferencial para el espesor $h\{t\}$ dependiente del tiempo, si se supone que, en cualquier instante de tiempo, h es independiente de x y que $V = kz$. Demuestre que la solución obtenida da el mismo valor para h que en el punto (a), cuando $t \longrightarrow \infty$.