CINEMÁTICA 3

Mecánica de Fluidos Avanzada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

ECUACION DE EULER (1)

- Para un volumen diferencial de fluido, las fuerzas que actúan sobre él son: presión y gravedad. Luego:

- La suma de fuerzas actuantes será:

$$(\rho\,\delta\mathcal{V})\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}\right) = (-\nabla p)\,\delta\mathcal{V} + (\rho\,\delta\mathcal{V})\,\mathbf{g}$$

- Dividiendo todo por el diferencial de masa:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g}}$$ **EC. DE EULER**

ECUACION DE EULER (2)

- Escrito en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{i}_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{i}_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{i}_z$$

EJERCICIO

- Un flujo incompresible no viscoso permanente tiene un campo de velocidades:

$$u = fx; \qquad v = -fy; \qquad w = 0$$

donde f es una constante que tiene las dimensiones de s^{-1}. Deducir una expresión para el campo de presión p {x, y, z} si la presión p {0, 0, 0} = P_0 y $\mathbf{g} = -g.\mathbf{i}_z$

ECUACION DE EULER (3)

- **Si la densidad del fluido es constante** en todo el campo de flujo e invariable en el tiempo, es posible simplificar la forma de la ecuación de Euler utilizando una nueva variable independiente p*:

$$p^* \equiv p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}$$

- Reemplazando en la ecuación de Euler:

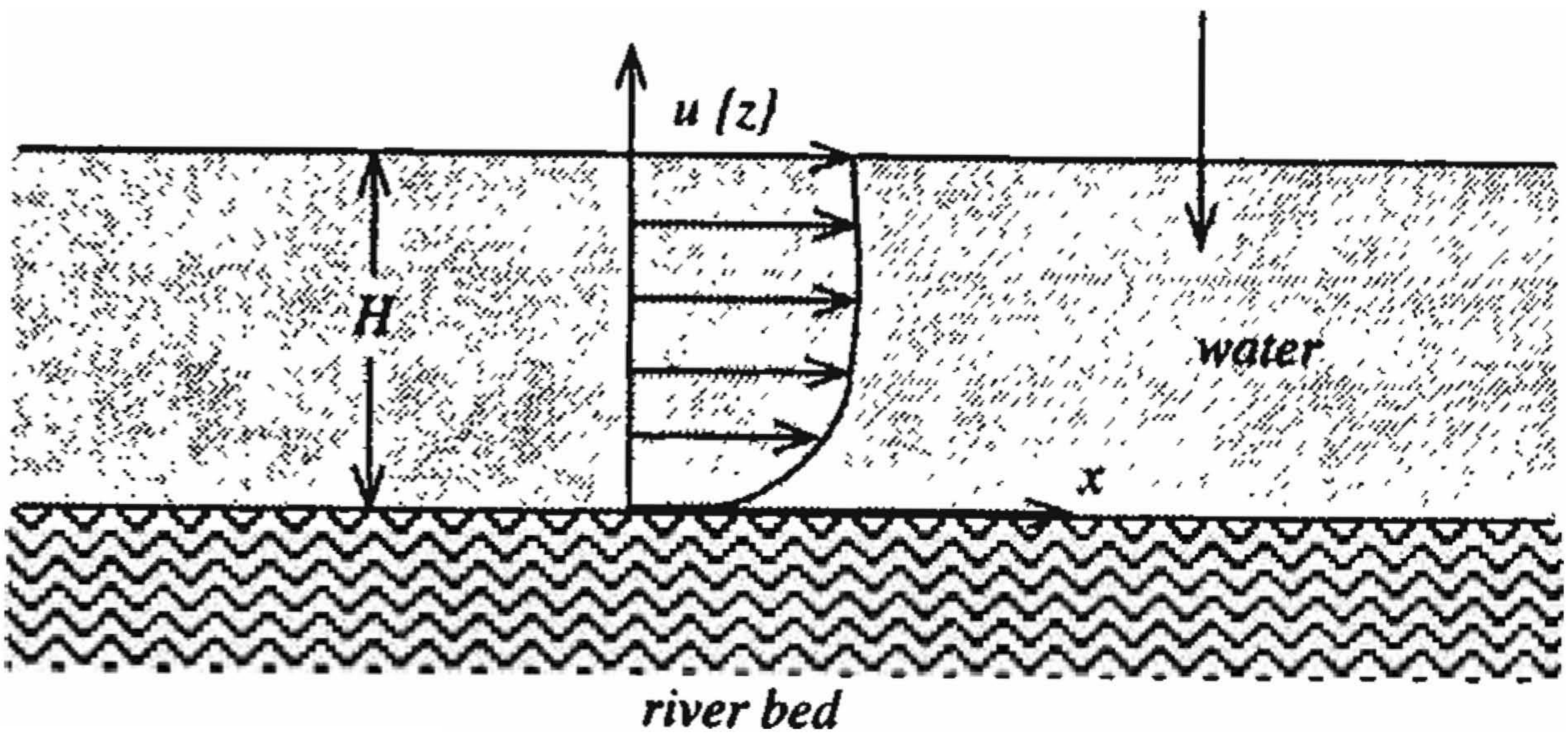
$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla(p^* + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{R}) + \mathbf{g}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\nabla p^* \qquad (Si \quad \nabla \rho = 0)$$

- Una vez que hemos resuelta la ecuación de Euler y obtenido p*{R, t}, entonces podemos determinar p {R, t}

EJERCICIO

- Un río de profundidad H fluye de manera constante con una velocidad $V=u\{z\}\, i_x$ que varía con la altura z sobre el lecho del río. Deducir una expresión para la distribución de la presión p {z} en el río.



ECUACION DE BERNOULLI (1)

- Sea la siguiente transformación:

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{A} = \nabla\left(\frac{A^2}{2}\right) - \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

y aplicando a la ecuación de Euler :

$$\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{g} = \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})$$

- Integrando a lo largo de una línea de corriente y para un diferencial de curva **dc,** en la dirección de la línea de corriente:

$$\int_1^2 \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{c} + \int_1^2 \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\cdot d\mathbf{c} + \int_1^2 \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot d\mathbf{c} - \int_1^2 \mathbf{g}\cdot d\mathbf{c} = \int_1^2 \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})\cdot d\mathbf{c}$$

ECUACION DE BERNOULLI (2)

- Calculando las integrales:

$$\int_1^2 \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)\cdot d\mathbf{c} = \frac{V_2^2}{2} - \frac{V_1^2}{2}$$

$$\int_1^2 \mathbf{g}\cdot d\mathbf{c} = \int_1^2 \nabla(\mathbf{g}\cdot\mathbf{R})\cdot d\mathbf{c}$$

$$= \mathbf{g}\cdot\mathbf{R}_2 - \mathbf{g}\cdot\mathbf{R}_1$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\rho}\int_1^2 \nabla p\cdot d\mathbf{s}$$

$$= \frac{1}{\rho}(p_2 - p_1)$$

- Finalmente:

$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s} + \left(\frac{\mathbf{V}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{R_2}\right) - \left(\frac{\mathbf{V}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} - \mathbf{g}\cdot\mathbf{R_1}\right) = 0}$$

ECUACION DE BERNOULLI (3)

- Calculando el producto del último término y considerando que la gravedad tiene dirección vertical:

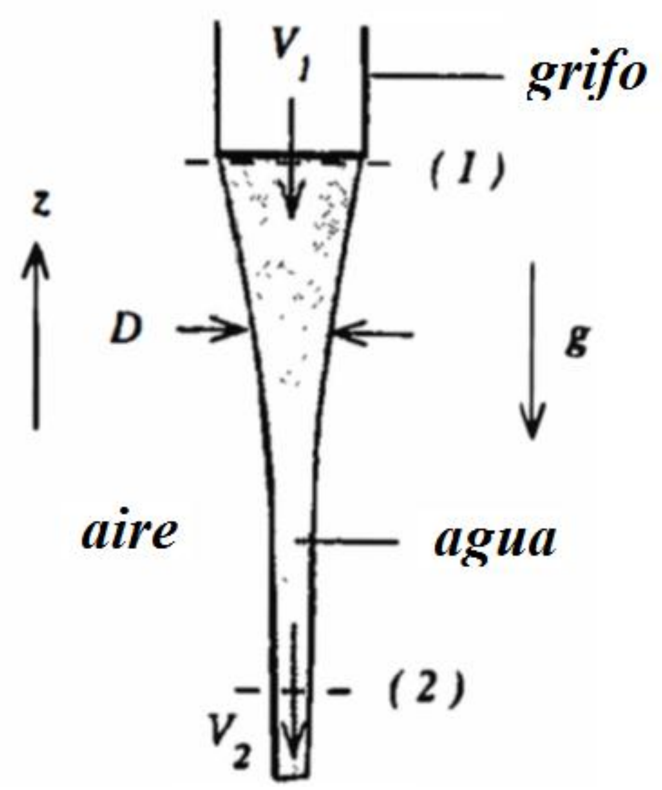
$$\boxed{\int_1^2 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \cdot ds + \left(\frac{\mathbf{V}_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2\right) - \left(\frac{\mathbf{V}_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1\right) = 0}$$

ECUACION DE BERNOULLI (4)

CHORROS

- Sea una corriente de fluido (como agua) que fluye a través de un fluido estacionario con el que no se mezcla (como el aire), tal como se muestra en la figura.

- El agua que sale del grifo con una velocidad V1 como una corriente circular de diámetro D1. A medida que cae, se acelera y el diámetro se contrae. Por último. la corriente se se hace tan delgada que las fuerzas de tensión superficial lo rompen en gotitas, pero antes de que esto sucede, el flujo puede describirse aplicando la ecuación de Bernoulli



ECUACION DE BERNOULLI (5)

- Es fácilmente verificable que:

$$\boxed{V_2^2 = V_1^2 + 2\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho}\right) g(z_1 - z_2)}$$

que puede simplificarse si ρ_a corresponde a aire:

$$V_2^2 = V_1^2 + 2g(z_1 - z_2)$$

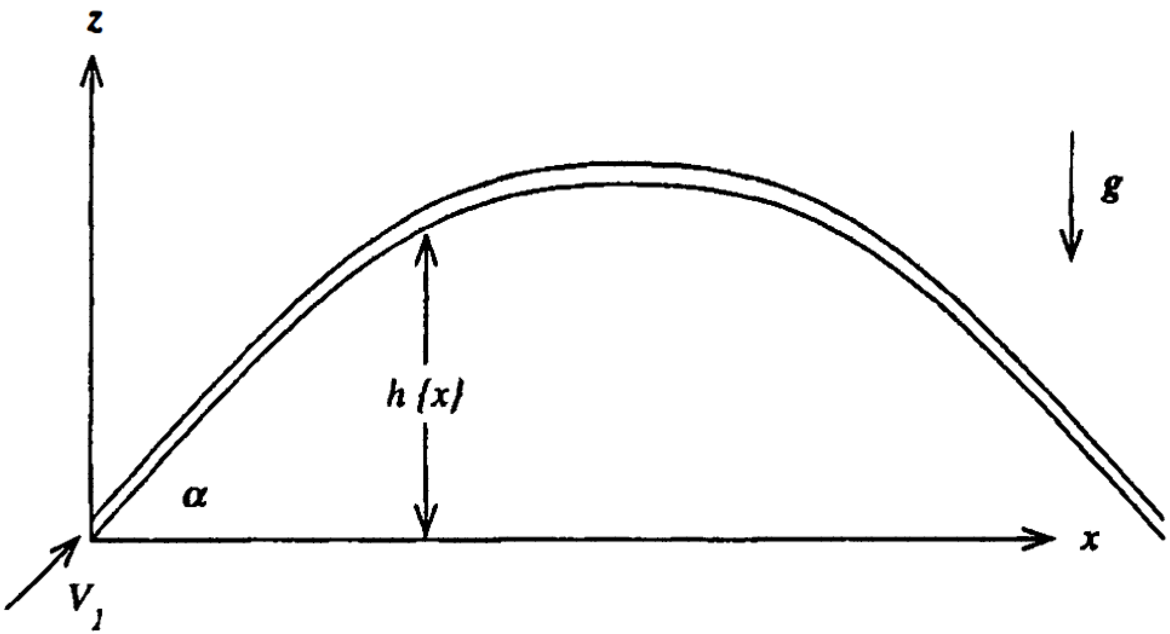
- Luego, se puede estimar el ancho del chorro por continuidad:

$$D_2 = D_1 \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}$$

$$= D_1 \left(\frac{V_1^2}{V_1^2 + 2g(z_1 - z_2)} \right)^{1/4}$$

EJERCICIO

- Una manguera de incendios dirige una corriente de agua de la velocidad V1 en un ángulo α por encima de la horizontal. La corriente se eleva al principio, pero luego con el tiempo cae. (a) derivar una expresión para la altura h {x} de la corriente por encima de la boquilla de la manguera como una función de la distancia horizontal X de la boquilla. (b) Calcular el valor máximo de h si V1=50m/s y α = 45 ° ..



ECUACION DE BERNOULLI (6)

FLUJO A TRAVÉS DE UN ORIFICIO

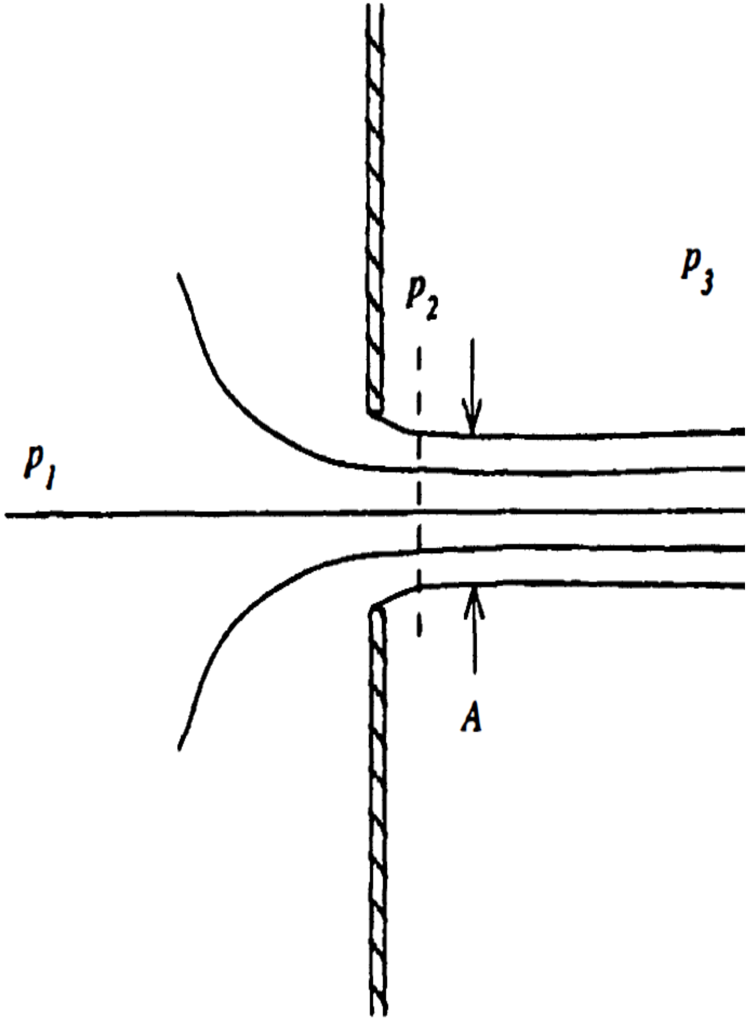
- Se puede demostrar que:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\rho}}$$

- Asimismo:

$$Q = A\sqrt{\frac{2(p_1 - p_3)}{\rho}}$$

$$\dot{m} = A\sqrt{2\rho(p_1 - p_3)}$$



ECUACION DE BERNOULLI (7)

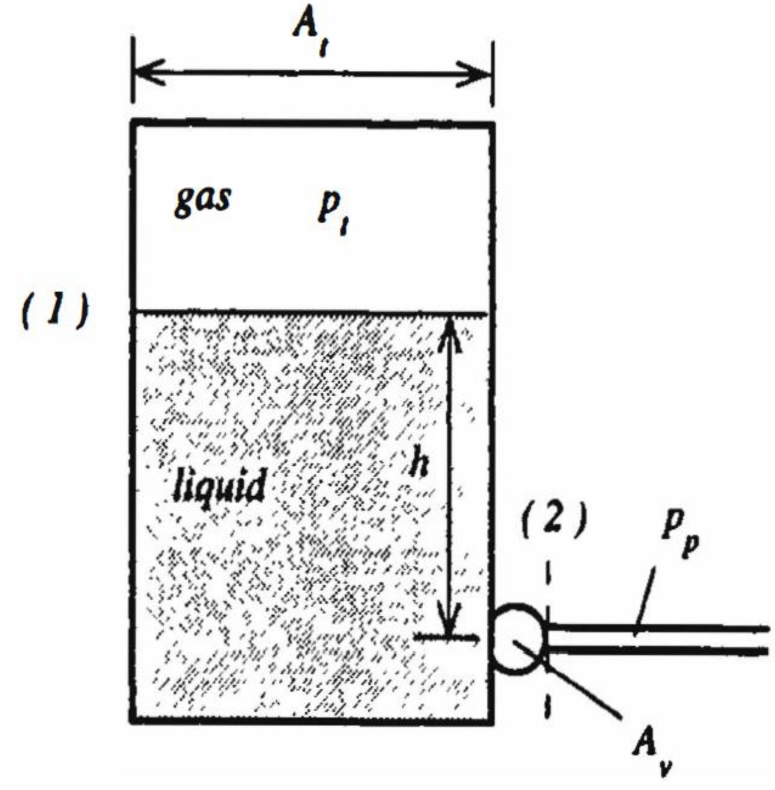
TANQUE PRESURIZADO

- Aplicando Bernoilli

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1$$

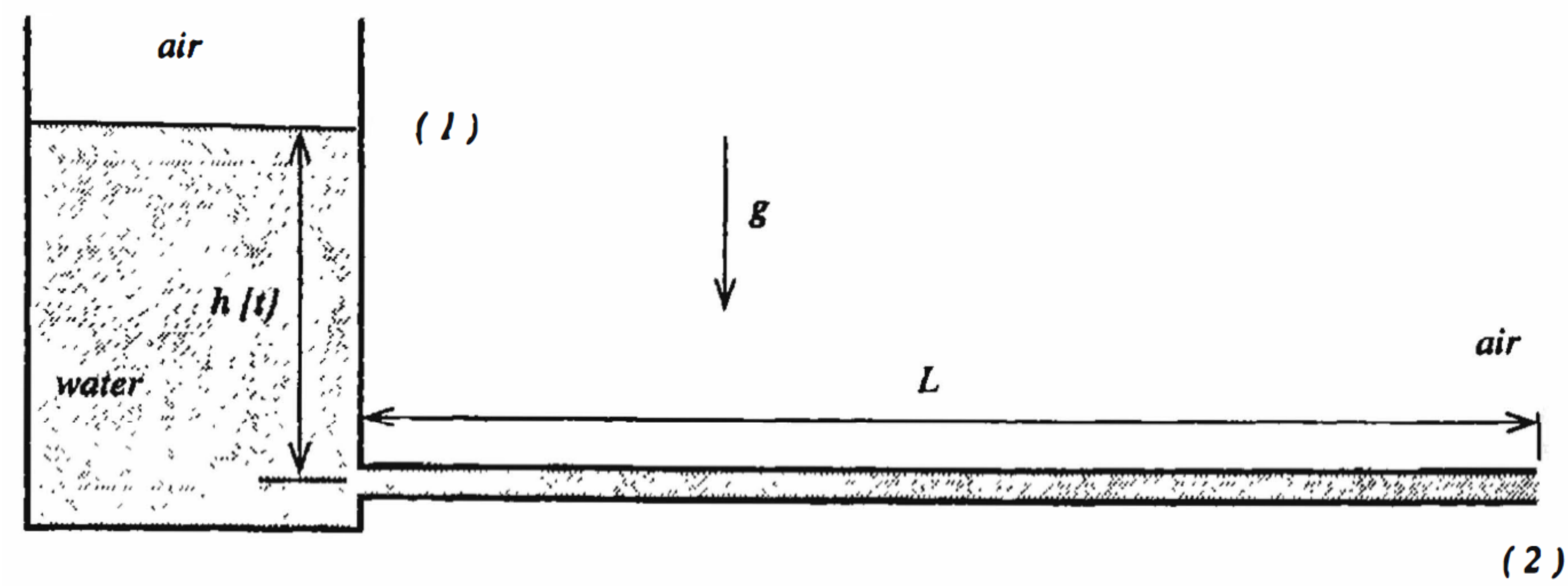
- Se puede demostrar que la velocidad en la válvula es:

$$V_v = \sqrt{2gh + \frac{2(p_t - p_p)}{\rho}}$$



EJERCICIO

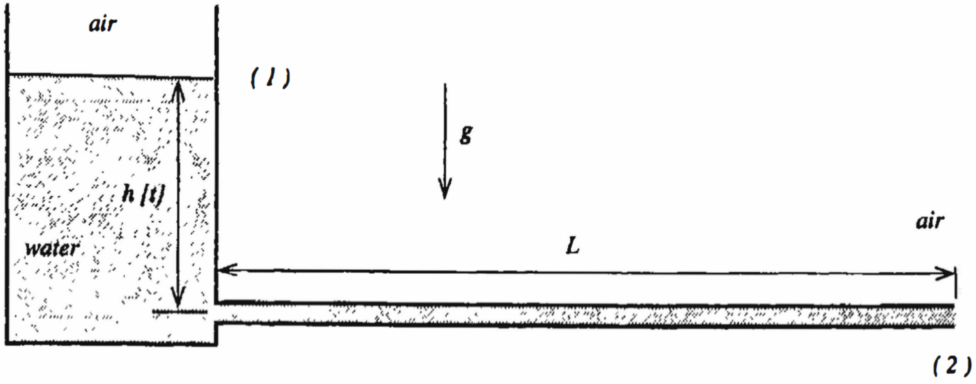
- Un tanque de almacenamiento de petróleo que tiene un diámetro D= 30m está lleno de aceite a una profundidad H = 5 m. El espacio por encima del aceite se ventila a la atmósfera. Un tubo de diámetro interior Dp = 5cm que va desde la base del tanque se rompe accidentalmente, permitiendo que el aceite que se derrame en el suelo. Calcular cuánto tiempo tomará para que el aceite se drene por completo del tanque.



ECUACION DE BERNOULLI (8)

FLUJO NO PERMANENTE

- Cuando los flujos se ponen en marcha desde el reposo o cambian con el tiempo, el término no estacionario en la ecuación de Bernoulli puede ser significativo.
- Supongamos la apertura abrupta de válvula en una tubería de longitud L en un tiempo t=0. La tubería es alimentada por un tanque. La ecuación de Bernoulli entre la superficie del depósito y la salida de la tubería será:



$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g z_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g z_1$$

$$\int_1^2 \frac{\partial V}{\partial t} ds = g h - \frac{V_2^2}{2}$$

ECUACION DE BERNOULLI (9)

- Ya que la Velocidad depende solamente del tiempo, la primera integral se resuelve como:

$$L\frac{dV_2}{dt} = g\,h - \frac{V_2^2}{2}$$

$$\frac{dV_2}{2\,gh - V_2^2} = \frac{dt}{2\,L}$$

- Integrando:

$$\tanh^{-1}\left\{\frac{V_2}{\sqrt{2gh}}\right\} = \frac{\sqrt{gh}\,t}{\sqrt{2}L}$$

$$V_2 = \sqrt{2\,gh}\tanh\left\{\frac{\sqrt{gh}\,t}{\sqrt{2}L}\right\}$$

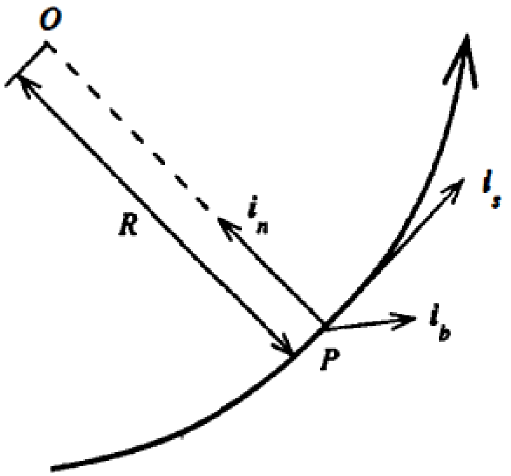
EJERCICIO

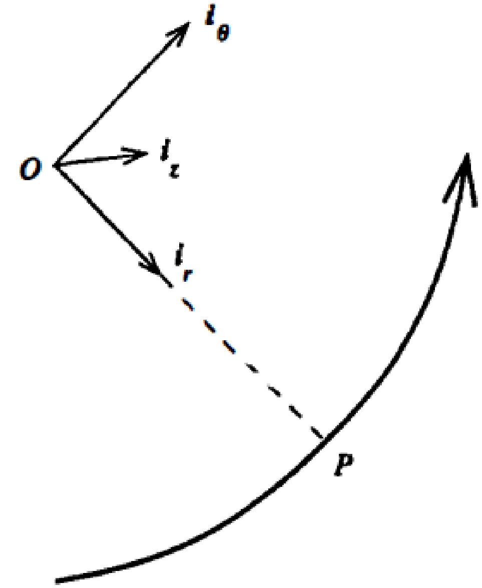
- Un reservorio se encuentra conectado a una tubería de 100m de longitud, que es controlada por una válvula ubicada en su extremo. Si la diferencia de niveles entre la superficie del tanque y la salida de la tubería es de 10m, grafique la variación de velocidades en función del tiempo.

ECUACION DE EULER EN COORDENADAS DE LINEA DE CORRIENTE (1)

- A veces es conveniente elegir un sistema cuyas direcciones locales están definidas por una línea de corriente del flujo. Las tres direcciones mutuamente perpendiculares entre sí en un punto en el flujo son determinados por las direcciones de la tangente, normal y binormal a la línea de corriente que pasa por el punto.

- Para desarrollar la ecuación de Euler para este sistema de coordenadas. vamos a incorporar un sistema de coordenadas cilíndricas con el centro en O y con el eje z en la dirección de la binormal





ECUACION DE EULER EN COORDENADAS DE LINEA DE CORRIENTE (2)

- Bajo este esquema de coordenadas, la aceleración será:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \left(-\frac{\partial V_n}{\partial t} + \frac{V^2}{R}\right)\mathbf{i}_n + \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\right)\mathbf{i}_s + \left(\frac{\partial V_b}{\partial t}\right)\mathbf{i}_b$$

- Luego, las ecuaciones de Euler quedarán definidas como:

$$\left(\frac{V^2}{R}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{i}_n = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial n}$$

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{i}_s = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial s}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} + \mathbf{g}\cdot\mathbf{i}_b = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial b}$$