Mecánica de Fluidos Avanzada MSc. Ing. Juan W. Cabrera

CINEMÁTICA 4

Mecánica de Fluidos Avanzada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

MOMENTUM LINEAL(1)

- El MOMENTUM del fluido en un volumen de material, denotado por el símbolo **M**, es la integral del momentum por unidad de volumen ρV sobre el volumen de material:

$$\mathbf{M} \equiv \iiint_{\mathcal{M}} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V}$$

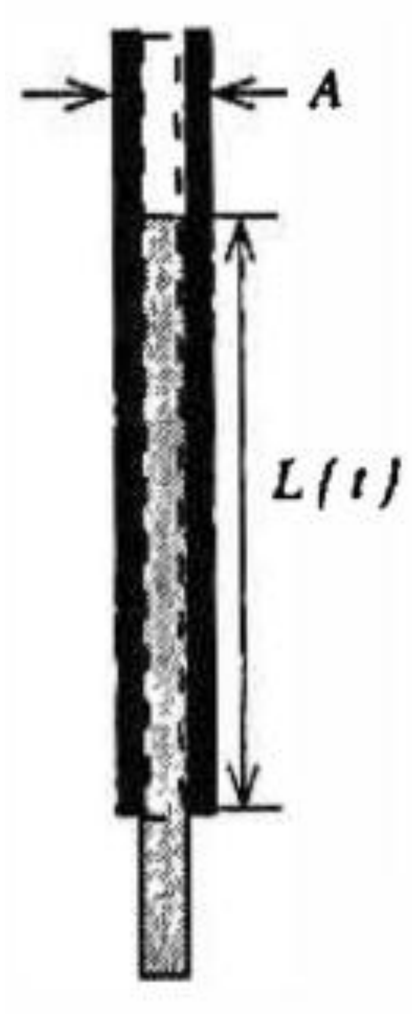
- Aplicando la ecuación de transporte de Reynolds

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V} \, d\mathcal{V} + \iint_{S} \rho \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) \, dS$$

- El primer término en el lado derecho es la variación del momentum respecto al tiempo dentro del volumen de control V, mientras que la segunda es el flujo neto de momentum alrededor del volumen de control.

EJERCICIO

- Un tubo de sección transversal constante A se llena con un líquido de densidad p. El tubo se mantiene en una posición vertical, y el extremo superior e inferior se abren a la atmósfera en el momento t = 0, lo que permite que el líquido drene fuera del tubo. Como el fluido drena, la longitud L {t} de la columna de líquido dentro del tubo se mide como una función del tiempo. Deducir una expresión para la derivada en el tiempo del momentum del fluido dentro del tubo como una función de p, A y L {t}.



LEY DEL MOVIMIENTO (1)

- Usualmente sobre un fluido actúan tres fuerzas:

$$\textbf{pressure force} = \iint_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n})\, d\mathcal{S}$$

$$\textbf{viscous force} = \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}\, d\mathcal{S}$$

$$\textbf{gravitational force} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{g}\, d\mathcal{V}$$

- Aplicando la ley de fuerzas:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \iint_{\mathcal{S}} (-p\mathbf{n})\, d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}\, d\mathcal{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho\mathbf{g}\, d\mathcal{V}$$

LEY DEL MOVIMIENTO (2)

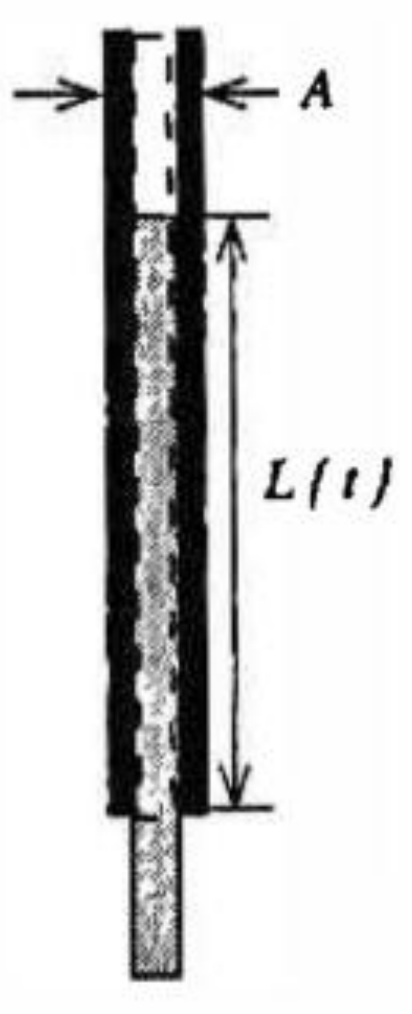
- Al aplicar la ecuación de transporte de Reynolds:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + \iint_{S} \rho \mathbf{V}(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, d\mathcal{S}$$
$$= \iint_{S} (-p\mathbf{n})\, d\mathcal{S} + \iint_{S} \boldsymbol{\tau}\, d\mathcal{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g}\, d\mathcal{V}$$

- Si existieran fuerzas externas actuando sobre el sistema, estas deben añadirse.

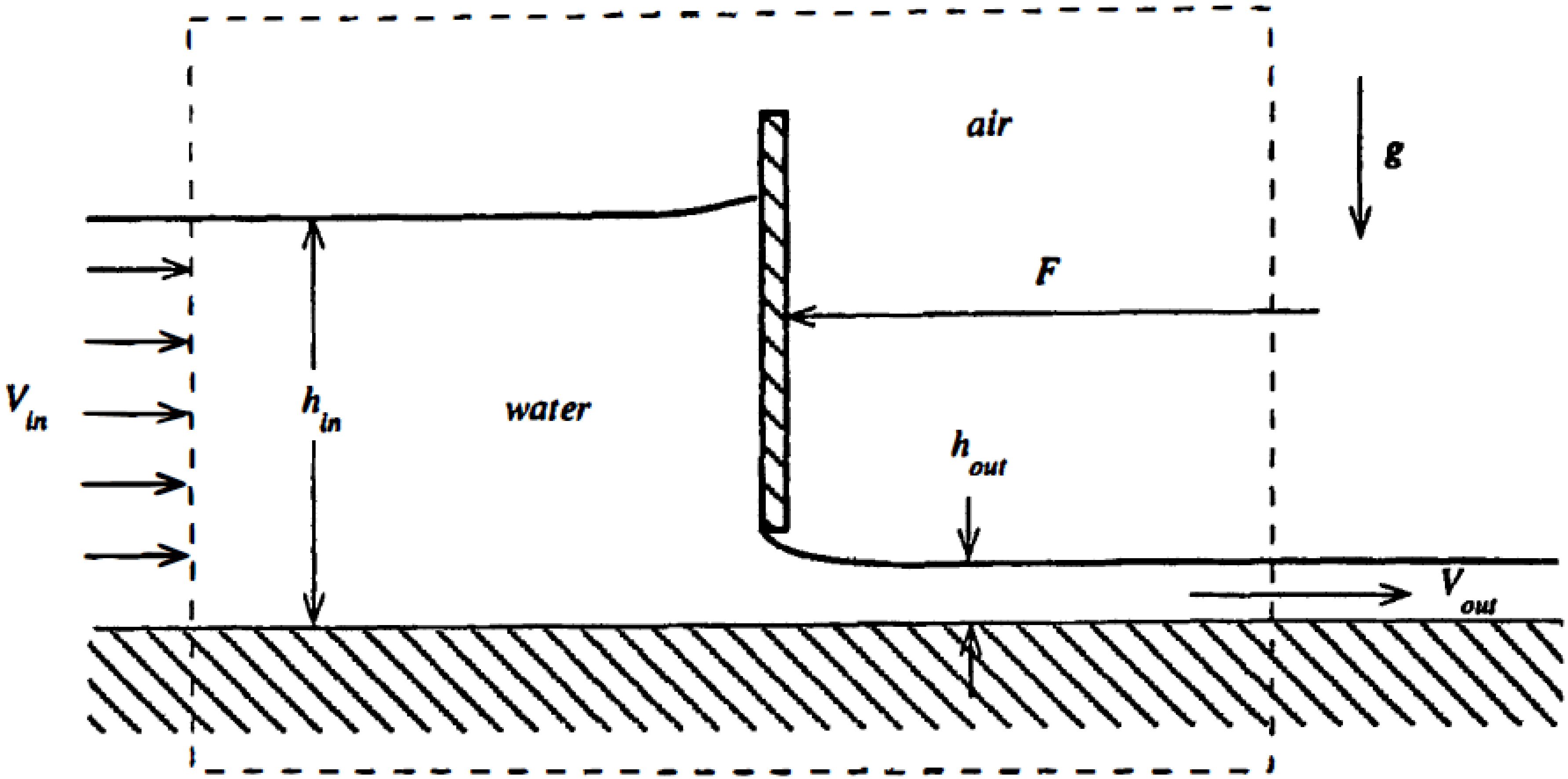
EJERCICIO

- Para el ejercicio anterior, derive una expresión para la fuerza viscosa.



FLUJO HORIZONTAL CON SUPERFICIE LIBRE (1)

- Sea una compuerta vertical insertada en una canal ancho. Sean las velocidades V_{in} y V_{out} constantes, y los respectivos tirantes h_{in} y h_{out} también constantes.



MSc. Ing. Juan W. Cabrera

FLUJO HORIZONTAL CON SUPERFICIE LIBRE (2)

- La compuerta ejerce una fuerza sobre el volumen de control.
- Ya que el flujo es unidireccional, podemos escribir la ecuación de cantidad de movimiento en forma escalar. Luego:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{V}\, d\mathcal{V} + (\dot{m}\mathbf{V})_{out} - (\dot{m}\mathbf{V})_{in} = \iint_{S}(-p\mathbf{n})\, dS + \iint_{S} \tau\, dS + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \mathbf{g}\, d\mathcal{V} + \Sigma \mathbf{F}_{ex}$$

$$0 + \rho V_{out}^2 (W h_{out}) - \rho V_{in}^2 (W h_{in}) = W\int_0^{h_{in}} (p - p_a)\, dz - W\int_0^{h_{out}} (p - p_a)\, dz + 0 + 0 - F$$

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2}\rho g (h_{in}^2 - h_{out}^2) + \rho h_{in} V_{in}^2 - \rho h_{out} V_{out}^2$$

MSc

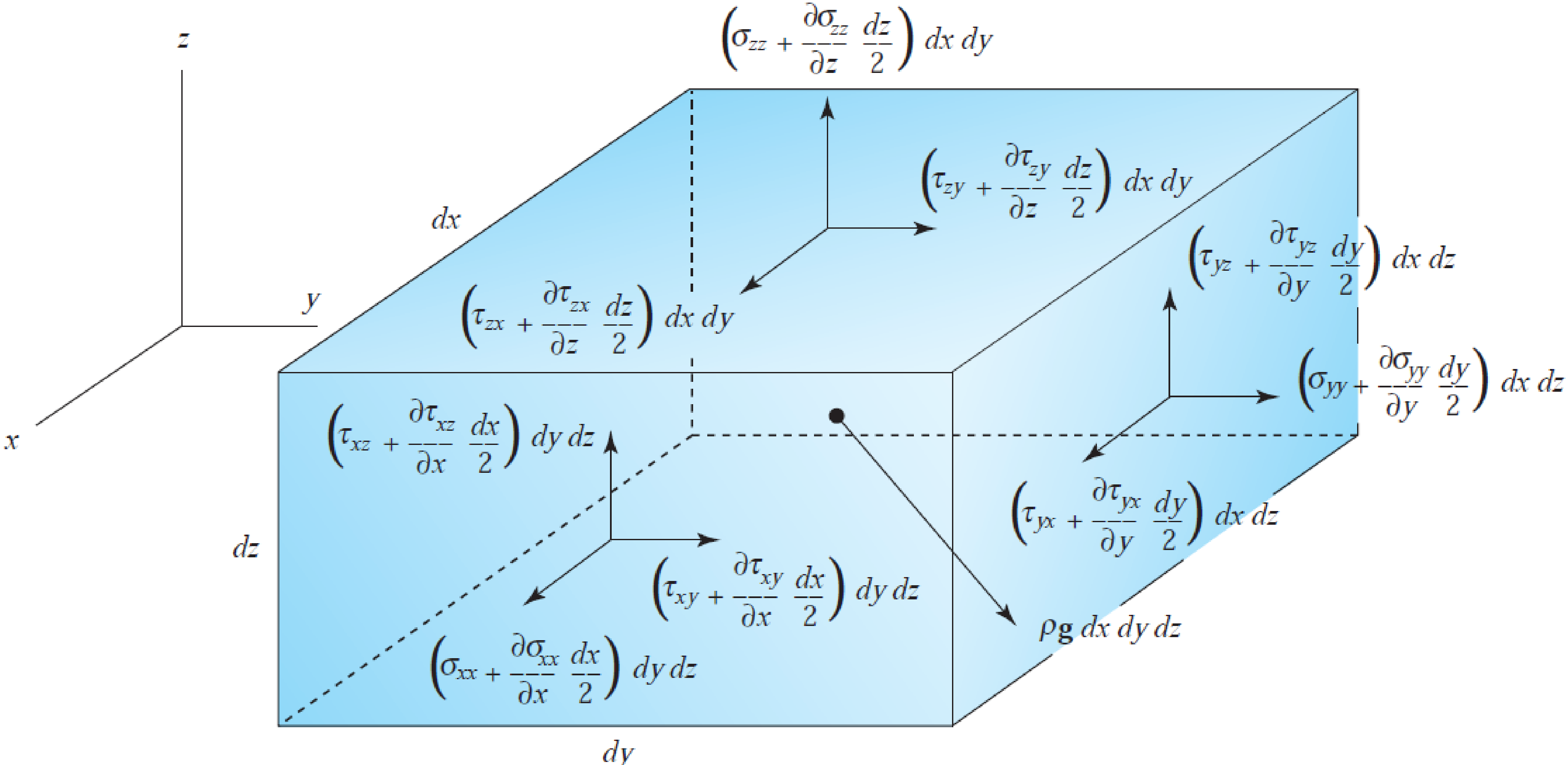
FLUJO HORIZONTAL CON SUPERFICIE LIBRE (3)

- Para un flujo inviscido, la expresión simplifica a

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2}\rho g \left(\frac{(h_{in} - h_{out})^3}{h_{in} + h_{out}} \right)$$

LEY DEL MOVIMIENTO: FORMA DIFERENCIAL (1)

- Para un volumen diferencial de fluido, los esfuerzos aplicados son:



LEY DEL MOVIMIENTO: FORMA DIFERENCIAL (2)

- Aplicando la segunda ley de Newton en la **dirección x**:

$$\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy-\left(\sigma_{xx}-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\,dz$$
$$-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dx\,dz-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dx\,dy+\rho g_x\,dx\,dy\,dz=\rho\,dx\,dy\,dz\,\frac{Du}{Dt}$$

- Simplificando se obtiene:

$$\boxed{\rho\frac{Du}{Dt}=\frac{\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho g_x}$$

- En forma similar, para las otras dos direcciones:

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+\rho g_y$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\sigma_{zz}}{\partial z}+\rho g_z$$

LEY DEL MOVIMIENTO: FORMA DIFERENCIAL (3)

- Además, es demostrable que:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

- De donde el tensor de esfuerzos puede escribirse como:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

- Si el flujo es inviscido, los cortantes pueden despreciarse:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

LEY DEL MOVIMIENTO: FORMA DIFERENCIAL (4)

- Y las ecuaciones de cantidad de movimiento se reducen a:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z$$

- que escrita en forma vectorial es:

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\boldsymbol{\nabla} p - \rho \mathbf{g}}$$

- que es la conocida **Ec. De Euler**.

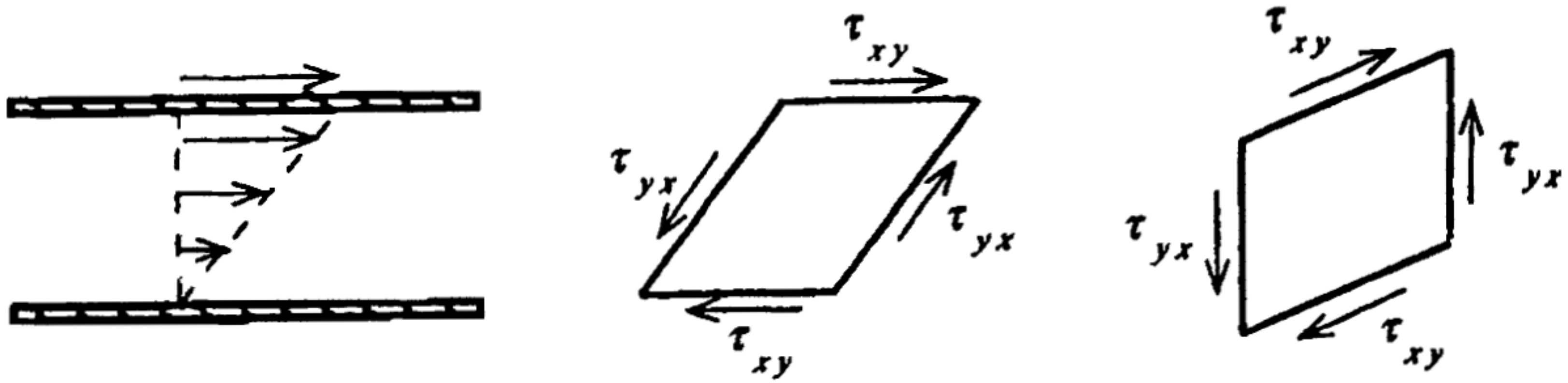
ESFUERZO DE CORTE (1)

- En hidrostática, el único esfuerzo presente es el normal (llamado la presión); sin embargo. en un flujo viscoso el esfuerzo usualmente no es normal a la superficie sino que tiene una componente tangencial proporcional a la viscosidad.

- Sea el esfuerzo del fluido definido como:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv (-p)\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}$$

- Si aceptamos que en un flujo hay una en ambas direcciones principales, e



ESFUERZO DE CORTE (2)

- Por definición de esfuerzo de corte, tendremos:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

- En forma similar, en los otros planos:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

- Aplicando el mimso concepto a los esfuerzos normales:

$$\tau_{xx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

ESFUERZO DE CORTE (3)

- La última ecuación es válida para flujos incompresibles.

- Si el flujo es compresible, entonces el esfuerzo normal será:

$$\tau_{xx} = 2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\mu_B - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{V}$$

- donde μ_B es llamada "viscosidad principal del fluido".

- De esta forma definimos la fuerza viscosa en la dirección x como:

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{i}_x = \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}$$

ESFUERZO DE CORTE (4)

- Para un flujo incompresible

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right]\right)$$

- Considerando la viscosidad constante, operando y simplificando

$$\begin{aligned}\mathbf{f}\cdot\mathbf{i}_x &= \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &= \mu\nabla^2 u + \mu\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\mathbf{V})\\ &= \mu\nabla^2 u\end{aligned}$$

- De esta forma resulta que:

$$\boxed{\mathbf{f} = (\mu\nabla^2 u)\,\mathbf{i}_x + (\mu\nabla^2 v)\,\mathbf{i}_y + (\mu\nabla^2 w)\,\mathbf{i}_z}$$

ECUACIONES DE NAVIER STOKES (1)

- Si añadimos la fuerza de corte encontrada a la ecuación de Euler, obtenemos las Ecuaciones de Navier Stokes:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} + \nu\nabla^2\mathbf{V}$$

válida para un flujo incompresible y de viscosidad constante.

- Esta ecuación equivale a:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)$$

ECUACIONES DE NAVIER STOKES (2)

- En una forma general, para flujo compresibles, puede escribirse como:

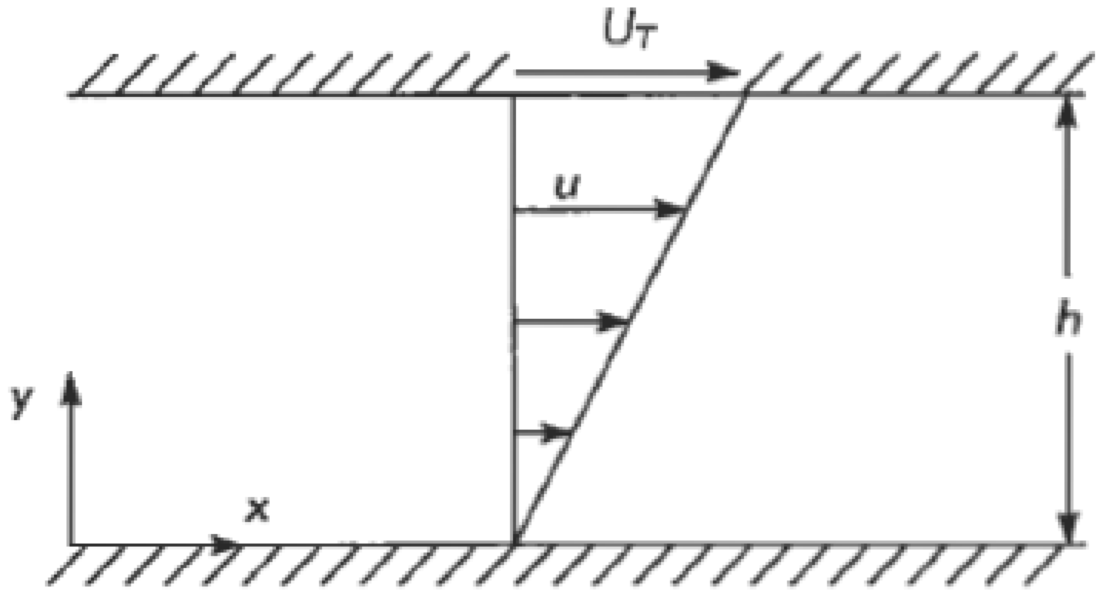
$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\mu}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

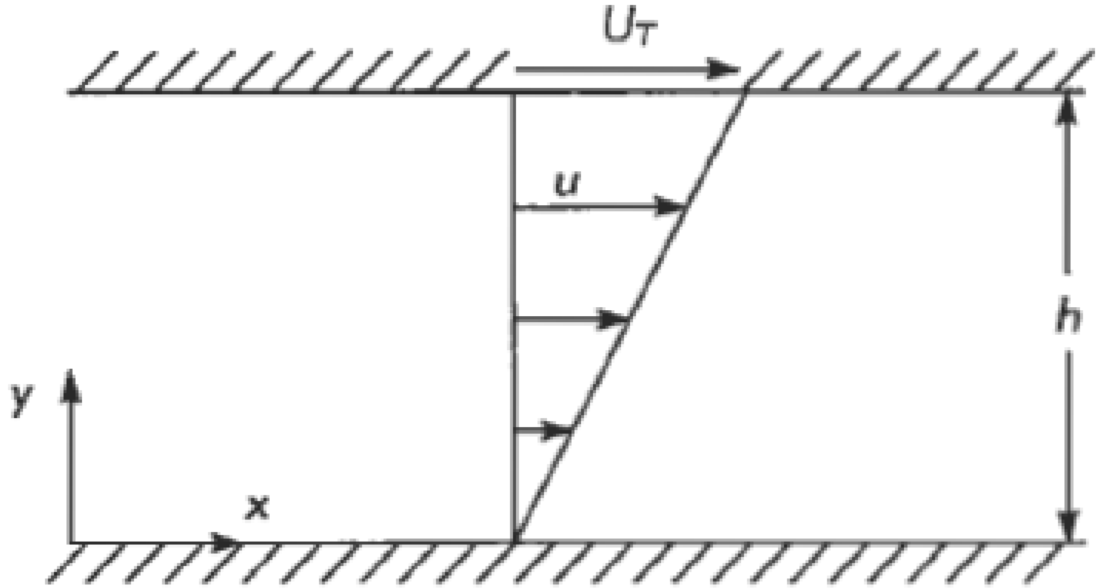
SOLUCIONES EXACTAS (1)

- Flujo de Couette: dos placas planas infinitas y paralelas; la placa superior se mueve con velocidad tangencial U_t y la segunda permanece estacionaria.



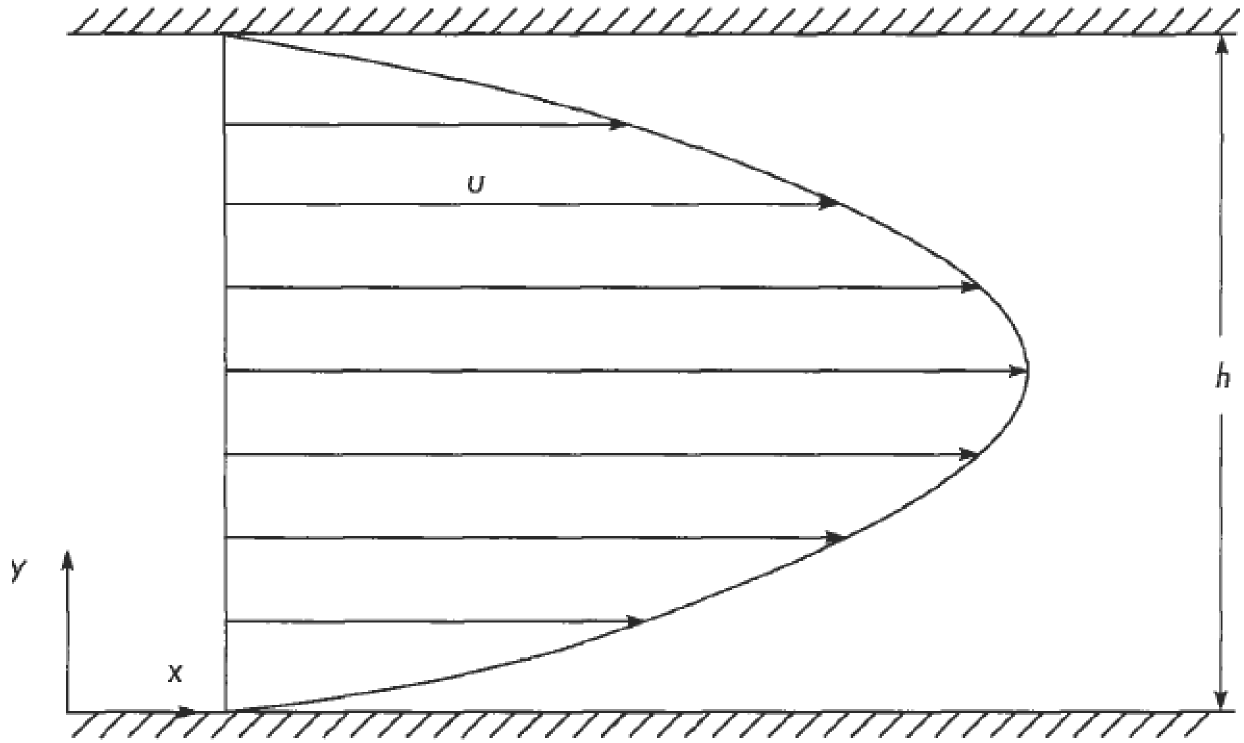
EJEMPLO

- Dadas dos placas separadas por 1mm, con la placa superior moviéndose a 1m/s y la inferior estacionaria. Encuentre la ecuación de distribución de velocidades y la velocidad a una altura de 0.2mm sobre el fondo. Para esta profundidad, ¿cuál será el esfuerzo de corte?



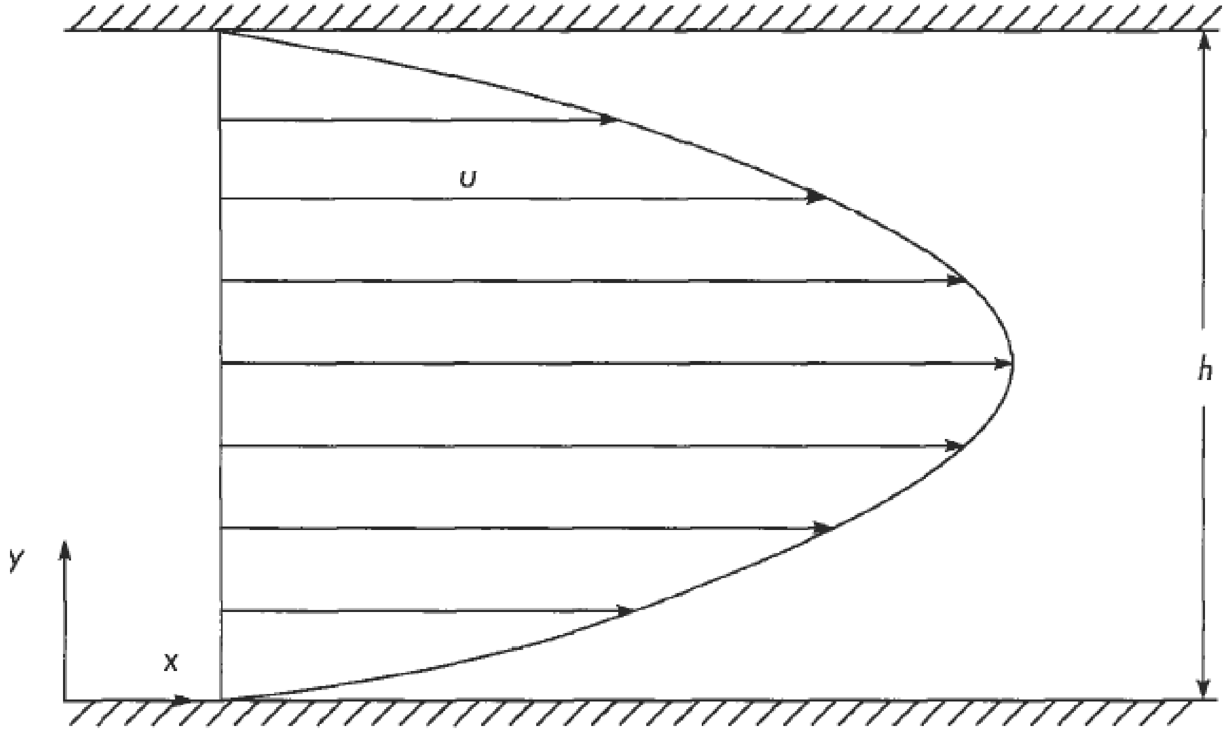
SOLUCIONES EXACTAS (2)

- Flujo de Poiseville Plano: dos placas planas infinitas y paralelas; ambas placas son estacionarias y el flujo se produce por presión.



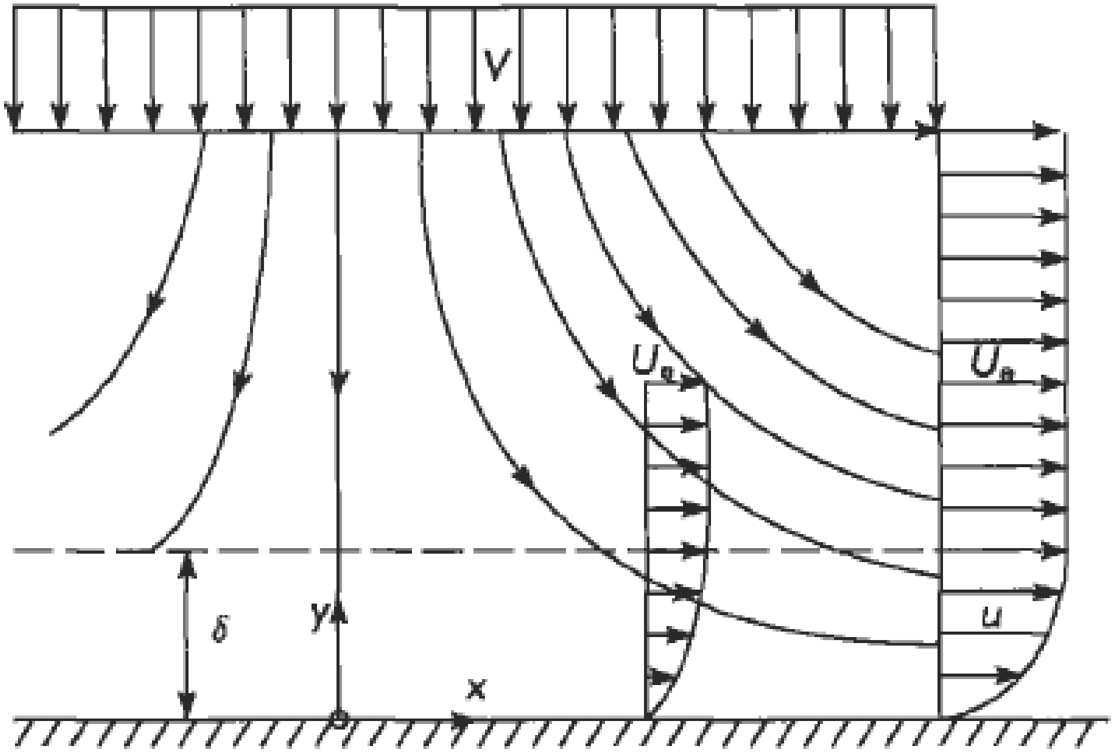
EJEMPLO

- Dado un flujo tipo Poiseville plano, donde la separación entre placas es 2mm. ¿Cuál será la relación entre velocidad y la variación de presíones?



SOLUCIONES EXACTAS (3)

- Flujo de Hiemenz: un flujo vertical con una zona de estancamiento en la parte inferior.



MOMENTUM ANGULAR (1)

- El producto vectorial ***Rx(mV)*** se llama el momento de cantidad de movimiento o momento angular de la partícula .

- SI multiplicamos la Ley de las Fuerzas por R:

$$\mathbf{R} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{V}) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times m\mathbf{V}) - \frac{d\mathbf{R}}{dt} \times m\mathbf{V} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R} \times m\mathbf{V}) = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

MOMENTUM ANGULAR (2)

- Si se tiene un volumen de control, llamemos H al momento angular del fluido en el volumen de control:

$$\mathbf{H} \equiv \iiint_{\mathcal{M}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{V})\, d\mathcal{V}$$

- Derivando esta expresión tendremos dH/dt, y aplicando la ecuación antes encontrada, podemos decir que “la derivada del momentum angular es igual a la suma de los momentos de las fuerzas actuantes sobre el volumen de control”; es decir:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}])\, d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau})\, d\mathcal{S} + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho \mathbf{g})\, d\mathcal{V}$$

- Esta es la **Ley de Newton del momentum angular**.

MOMENTUM ANGULAR (3)

- Aplicando la Ecuación de Transporte de Reynolds:

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho\mathbf{V})\, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{R} \times \rho\mathbf{V})(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, d\mathcal{S}$$

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho\mathbf{V})\, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{R} \times \rho\mathbf{V})(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\, d\mathcal{S}$$

$$= \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{R} \times [-p\mathbf{n}])\, d\mathcal{S} + \iint_{\mathcal{S}} (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau})\, d\mathcal{S} + \iiint_{\mathcal{V}} (\mathbf{R} \times \rho\mathbf{g})\, d\mathcal{V}$$

MOMENTUM ANGULAR (4)

- Para una entrada y una salida:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}}(\mathbf{R}\times\rho\mathbf{V})\,d\mathcal{V}+(\mathbf{R}\times\dot{m}\mathbf{V})_{out}-(\mathbf{R}\times\dot{m}\mathbf{V})_{in}$$
$$=\iint_{S}(\mathbf{R}\times[-p\mathbf{n}])\,dS+\iint_{S}(\mathbf{R}\times\boldsymbol{\tau})\,dS+\iiint_{\mathcal{V}}(\mathbf{R}\times\rho\mathbf{g})\,d\mathcal{V}$$

- Si hay fuerzas externas:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\mathcal{V}}(\mathbf{R}\times\rho\mathbf{V})\,d\mathcal{V}+(\mathbf{R}\times\dot{m}\mathbf{V})_{out}-(\mathbf{R}\times\dot{m}\mathbf{V})_{in}$$
$$=\iint_{S}(\mathbf{R}\times[-p\mathbf{n}])\,dS+\iint_{S}(\mathbf{R}\times\boldsymbol{\tau})\,dS+\iiint_{\mathcal{V}}(\mathbf{R}\times\rho\mathbf{g})\,d\mathcal{V}+\Sigma\mathbf{T}_{ex}$$

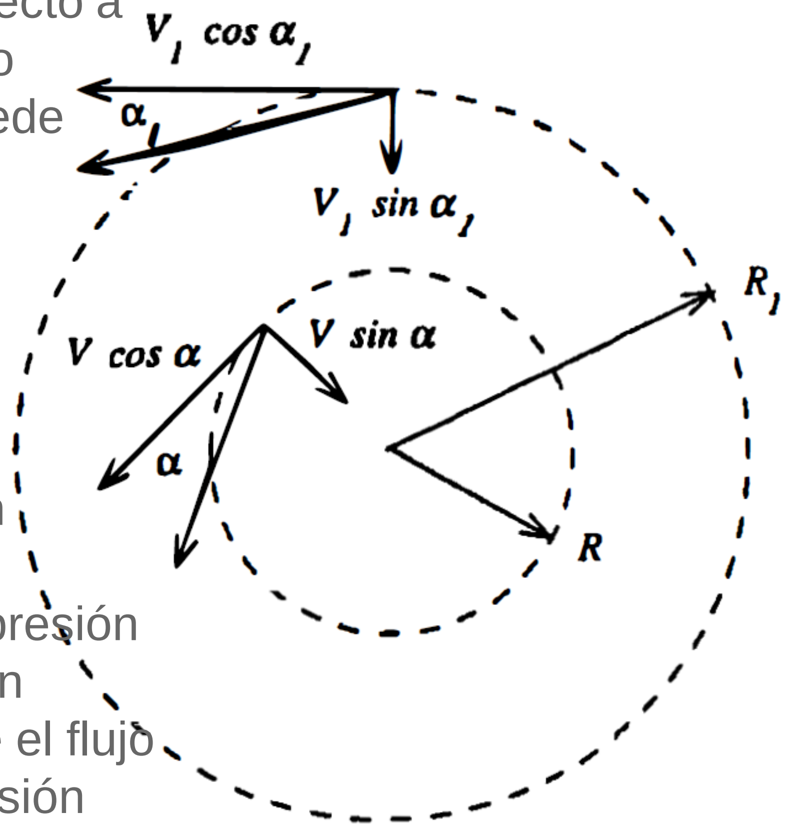
EJEMPLO 1

- Un flujo permanente axisimétrico plano de fluido incompresible no viscoso consiste en un remolino, hacia el interior de flujo que tiene una velocidad V que se encuentra en un ángulo α con respecto a la tangente a un círculo de radio R. Usando coordenadas cilíndricas, la velocidad V puede expresarse como:

$$\mathbf{V} = (V\cos\alpha)\mathbf{i}_\theta - (V\sin\alpha)\mathbf{i}_r$$

donde, a causa de la simetría axial, V y α dependen sólo de R.

La velocidad V1 de flujo y el ángulo $\alpha 1$ son conocidos en el radio de entrada R1. (a) Despreciando la gravedad, derivar una expresión para la velocidad V y el ángulo de flujo α en cualquier radio R< R1. (b) Suponiendo que el flujo no viscoso permanente, deducir una expresión para la diferencia de presión PI - P a lo largo de una línea de corriente entre R1 y R.



EJEMPLO 2

El agua fluye con un caudal constante Q = 0.01 m3/s a través de una tubería que tiene dos codos en ángulo recto como se muestra en la figura. Si la tubería tiene una sección transversal interna con un área de 2,580 mm2 y pesa 300 N/m, ¿cuáles son las componentes del momento flector en *A*?