

FLUJO GRADUALMENTE VARIADO

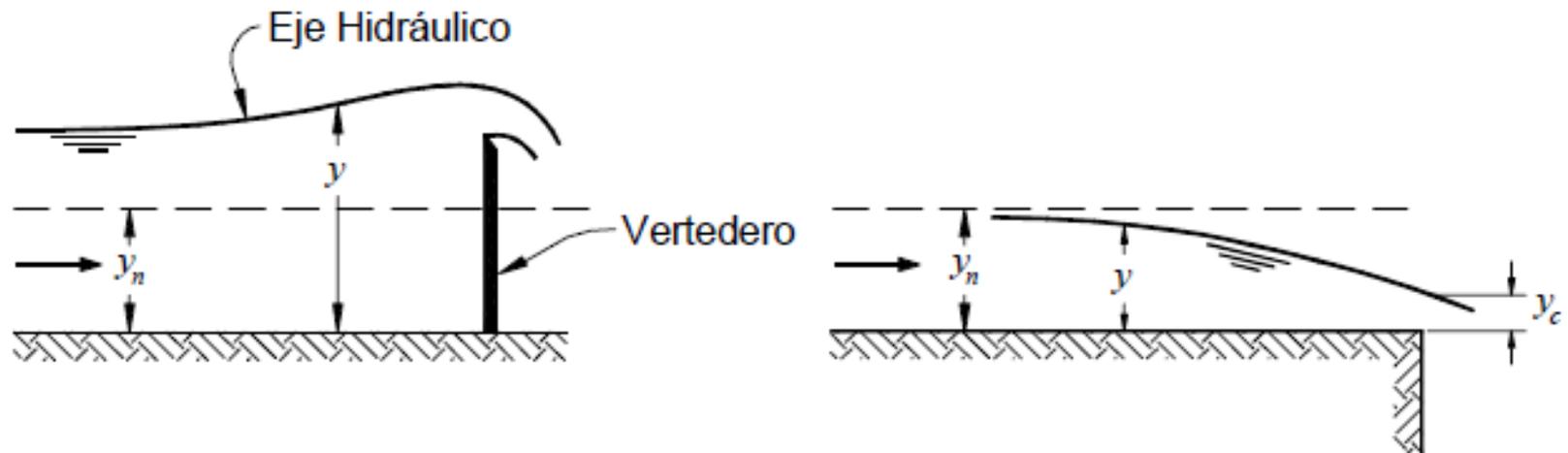
Flujo en Superficie Libre



**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E
HIDROLOGÍA**

1. FLUJO GRADUALMENTE VARIADO (1)

- El flujo gradualmente variado (F.G.V.) es un flujo permanente cuya profundidad (o tirante) varía suavemente a lo largo del eje de un canal. Así, la velocidad varía de una sección a otra y las tres pendientes son diferentes.
- *La pérdida de carga en una sección es la misma que correspondería a un flujo uniforme que tuviese la misma velocidad y radio hidráulico que la sección mencionada.*





1. FLUJO GRADUALMENTE VARIADO (2)

- Para el análisis del FGV se requiere realizar otras asunciones:
 - La distribución de presiones es hidrostática.
 - Se analiza un canal prismático y su alineamiento es rectilíneo.
 - El coeficiente de rugosidad es constante e independiente del tirante.
 - La distribución de velocidades es invariable en el tiempo.
 - La pendiente del canal es pequeña.
 - El factor de sección Z y el factor de capacidad K (o conductividad) son constantes:

$$Z = \sqrt{\frac{A^3}{T}}$$

$$K = \frac{Q}{S^{\frac{1}{2}}}$$

2. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FGV (1)

De la figura:

$$H = z + d \cos \theta + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

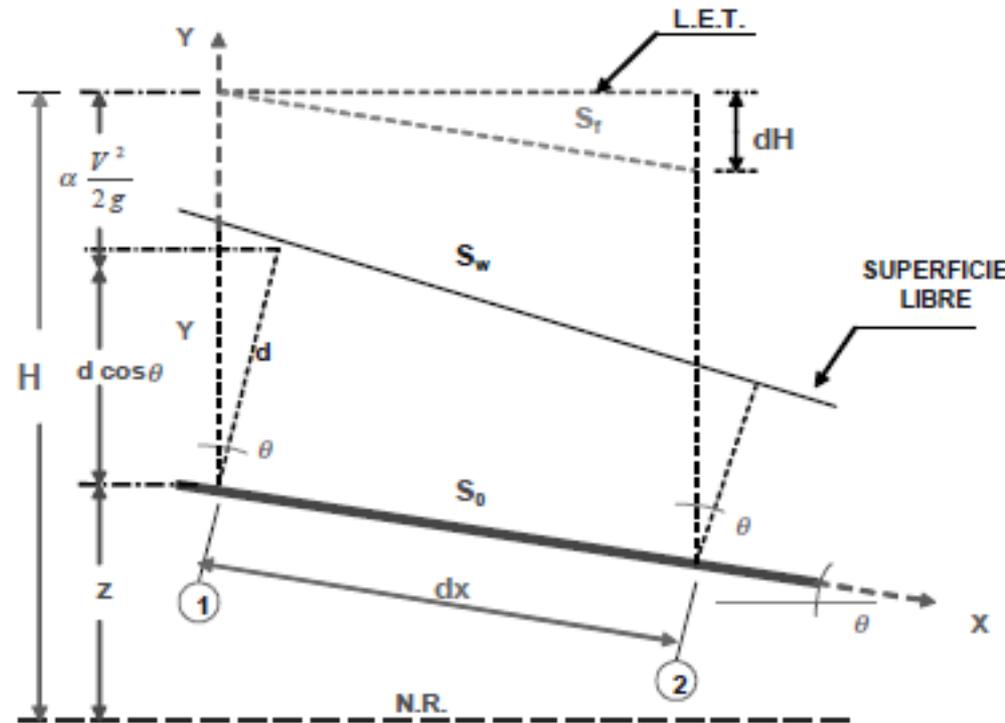
Si: θ y α son constantes:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \cos \theta \frac{dd}{dx} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \frac{dd}{dx}$$

en donde:

$$S_f = -\frac{dH}{dx}$$

$$S_0 = \text{sen} \theta = -\frac{dz}{dx}$$



reemplazando se tiene:

$$-S_f = -S_0 + \cos \theta \frac{dd}{dx} + \alpha \frac{d}{dd} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \frac{dd}{dx}$$

$$S_0 - S_f = \left[\cos \theta + \alpha \frac{d}{dd} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \right] \frac{dd}{dx}$$



$$\frac{dd}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{\cos \theta + \alpha \frac{d}{dd} \left(\frac{V^2}{2g} \right)}$$

ECUACION
DINAMICA
DEL FGV



2. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FGV (2)

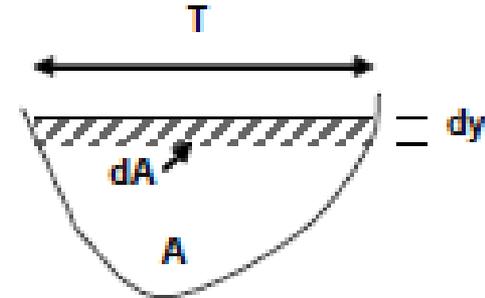
- En esta ecuación, dd/dx representa la pendiente de la superficie respecto al fondo del canal.
- Si $dd/dx=0$; las pendientes **$S_o=S_f$** .
- Si $dd/dx>0$; **$S_o>S_f$** .
- Si $dd/dx<0$; **$S_o<S_f$** .
- Si la pendiente del canal fuese muy pequeña, $\theta=0$ y $d=y$. Luego, la ecuación del FGV se reduce a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 + \alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{V^2}{2g} \right)}$$

2. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FGV (3)

- Aplicando la ecuación de continuidad, el término de velocidad puede escribirse como:

$$\alpha \frac{d}{dy} \left(\frac{V^2}{2g} \right) = \frac{\alpha Q^2 dA^{-2}}{2g} = - \frac{\alpha Q^2 dA}{g A^3} = - \frac{\alpha Q^2 T}{g A^3}$$



y la ecuación del FGV se escribirá como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - \alpha \frac{Q^2 T}{g A^3}}$$

- La expresión de velocidad puede reescribirse como:

$$\alpha \frac{Q^2 T}{g A^3} = \alpha \frac{V^2 T}{g A} = \alpha \frac{V^2}{g d} = Fr^2$$



2. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FGV (4)

quedando la ecuación de FGV como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - Fr^2}$$

La ecuación puede escribirse también **en función de la conductividad K.**

Para ello:

- aplicando a la pendiente de la energía:

$$S_f = \frac{Q^2}{K^2}$$

- aplicando a la pendiente normal:

$$S_o = \frac{Q^2}{K_n^2}$$

$$K = \frac{Q}{S^{\frac{1}{3}}}$$

y al dividir ambas ecuaciones:

$$\frac{S_f}{S_o} = \frac{K_n^2}{K^2} = \left(\frac{K_n}{K} \right)^2$$



2. ECUACIÓN DINÁMICA DEL FGV (5)

- De igual manera, evaluando el factor de sección para un flujo y

aplicando el factor para el *Flujo Crítico*:

$$Z_c^2 = \frac{A^3}{T} = \alpha \frac{Q^2}{g}$$

y al dividir ambas ecuaciones:

$$\left(\frac{Z_c}{Z} \right)^2 = \alpha \frac{Q^2 T}{g A^3}$$

- Finalmente, la ecuación del FGV puede escribirse como:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (K_n/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2}$$

3. ECUACIÓN DEL FGV EN CANALES MUY ANCHOS (1)

- En un canal muy ancho: $R=y$; asimismo, para un ancho unitario, $A=y$.
- Considerando la Ec de Manning, la conductividad será

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{AR^{2/3}}{n} = \frac{yy^{2/3}}{n} = \frac{y^{5/3}}{n} \\ K_n &= \frac{y_n^{5/3}}{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{K_n}{K} = \left(\frac{y_n}{y} \right)^{5/3}$$

- El factor de sección será:

$$\left. \begin{aligned} Z &= A\sqrt{\frac{A}{T}} = y\sqrt{\frac{y}{1}} = y^{3/2} \\ Z_c &= y_c^{3/2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{Z_c}{Z} = \left(\frac{y_c}{y} \right)^{3/2}$$

3. ECUACIÓN DEL FGV EN CANALES MUY ANCHOS (2)

- Reemplazando, la ecuación del FGV se expresará en función de los tirantes normal y crítico:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{y_n}{y}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{y_c}{y}\right)^3}$$

- De igual manera, si se aplica la ecuación de Chezy:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{y_n}{y}\right)^3}{1 - \left(\frac{y_c}{y}\right)^3}$$

4. PERFILES DE FLUJO (1)

- Pueden ser de dos tipos:

- REMANSO: Si la profundidad de flujo aumenta en la dirección del flujo. Se presentan dos casos:

$$1. 1 - (K_n/K)^2 > 0 \text{ y } 1 - (Z_c/Z)^2 > 0$$

$$2. 1 - (K_n/K)^2 < 0 \text{ y } 1 - (Z_c/Z)^2 < 0$$

Como:

$$\frac{dy}{dx} = S_0 \frac{1 - (K_n/K)^2}{1 - (Z_c/Z)^2} = S_0 \frac{1 - \left(\frac{y_n}{y}\right)^{10/3}}{1 - \left(\frac{y_c}{y}\right)^3}$$

esto implica que, para el primer caso, $y > y_n$ y que $y > y_c$.
Esta condición admite dos subcasos: $y > y_n > y_c$ y $y > y_c > y_n$.

**FLUJO
SUBCRÍTICO!**

4. PERFILES DE FLUJO (2)

Para el segundo caso, $y_n > y$ y $y_c > y$;



Esta condición admite también dos subcasos: $y_n > y_c > y$ y $y_c > y_n > y$.

El primer subcaso corresponde a una pendiente suave y el segundo a una pendiente fuerte.

- CAIDA: Si la profundidad de flujo disminuye en la dirección del flujo.

$$1. 1 - (K_n/K)^2 > 0 \text{ y } 1 - (Z_c/Z)^2 < 0$$

$$2. 1 - (K_n/K)^2 < 0 \text{ y } 1 - (Z_c/Z)^2 > 0$$

- El análisis de cada uno de los casos conduce a los siguientes perfiles de flujo

Subcrítica si $y_n > y_c$; perfiles tipo M.

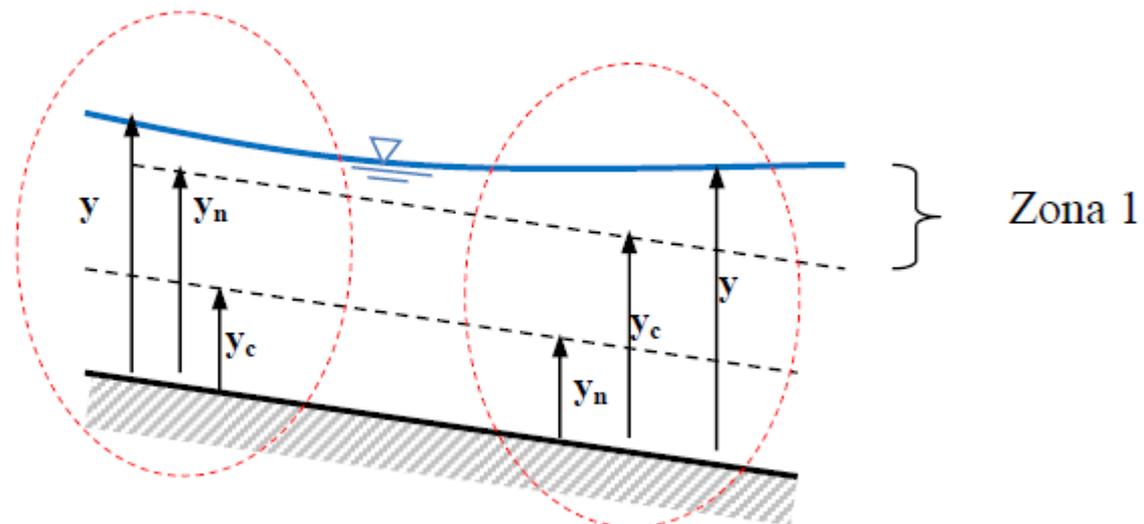
Crítica si $y_n = y_c$; perfiles tipo C.

Supercrítica si $y_n < y_c$; perfiles tipo S.

4. PERFILES DE FLUJO (3)

Zonas de generación de las Curvas de Remanso

a) Zona 1

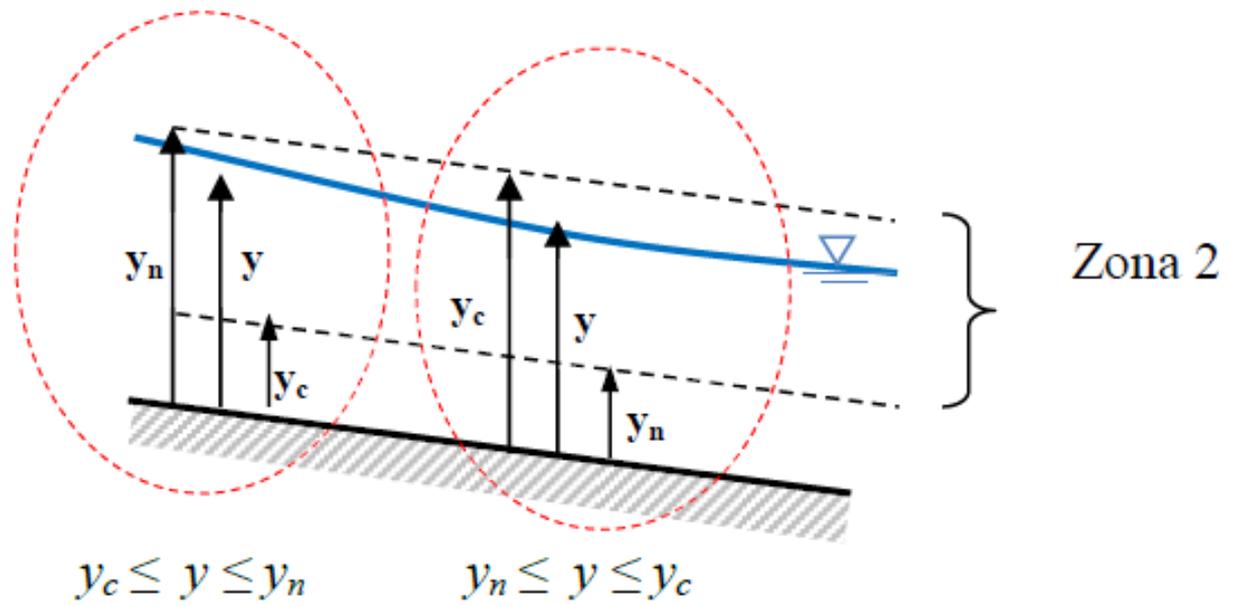


Perfil se presenta en Zona 1 cuando el tirante de escurrimiento:

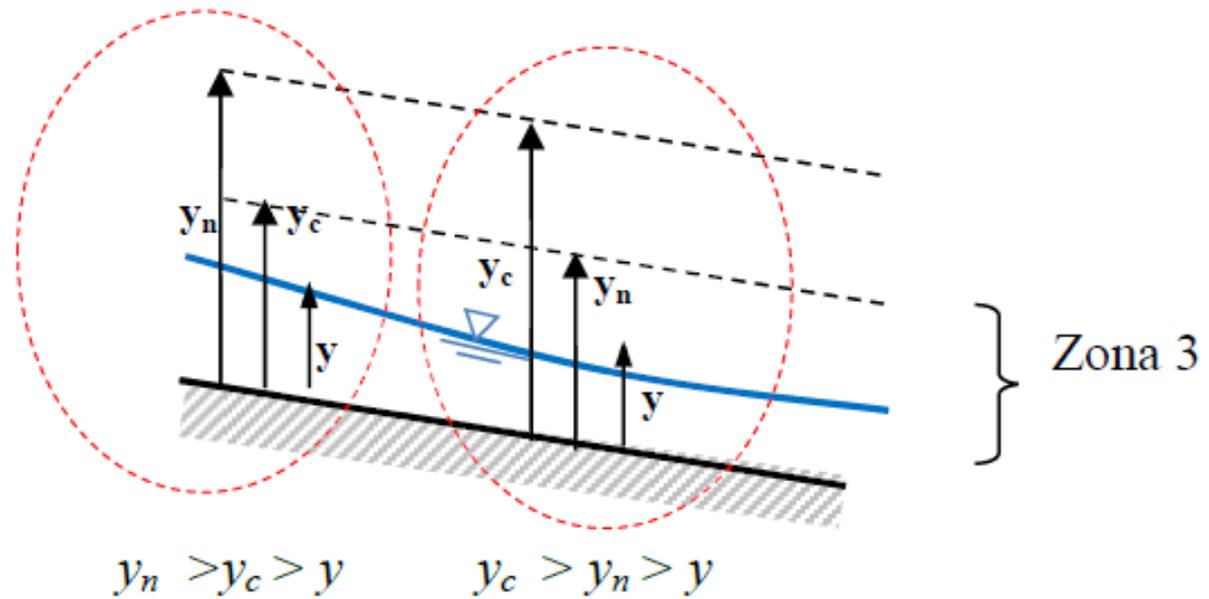
$$y > y_n > y_c$$

$$y > y_c > y_n$$

b) Zona 2



c) Zona 3





4. PERFILES DE FLUJO (5)

En algunos casos la pendiente puede ser:

Horizontal, $y_n = \infty$; perfiles tipo H.

Negativa o adversa, y_n no existe; perfiles tipo A.

- Los perfiles indicados se resumen en el siguiente cuadro.

Pendiente del canal	Designación			Relación de y con y_n y y_c			Tipo general de curva	Tipo de flujo
	Zona 1	Zona 2	Zona 3	Zona 1	Zona 2	Zona 3		
Horizontal $S_0 = 0$	Ninguno			$y > y_n > y_c$			Ninguno	Ninguno
		H2		$y_n > y > y_c$			Caída	Subcrítico
			H3	$y_n > y_c > y$			Remanso	Supercrítico
Suave $0 < S_0 < S_c$	M1			$y > y_n > y_c$			Remanso	Subcrítico
		M2		$y_n > y > y_c$			Caída	Subcrítico
			M3	$y_n > y_c > y$			Remanso	Supercrítico
Crítica $S_0 = S_c > 0$	C1			$y > y_c = y_n$			Remanso	Subcrítico
		C2		$y_c = y = y_n$			Paralelo al fondo del canal	Uniforme-crítico
			C3	$y_c = y_n > y$			Remanso	Supercrítico
Empinada $S_0 > S_c > 0$	S1			$y > y_c > y_n$			Remanso	Subcrítico
		S2		$y_c > y > y_n$			Caída	Supercrítico
			S3	$y_c > y_n > y$			Remanso	Supercrítico
Adversa $S_0 < 0$	Ninguno			$y > (y_n)^* > y_c$			Ninguno	Ninguno
		A2		$(y_n)^* > y > y_c$			Caída	Subcrítico
			A3	$(y_n)^* > y_c > y$			Remanso	Supercrítico



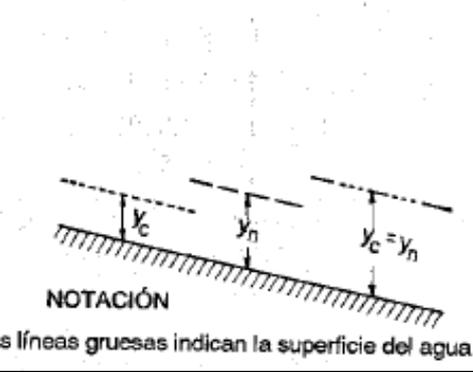
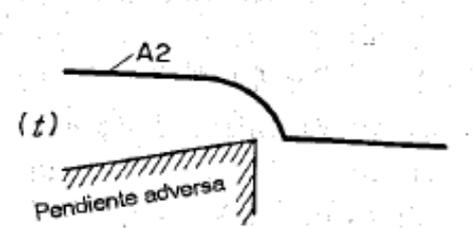
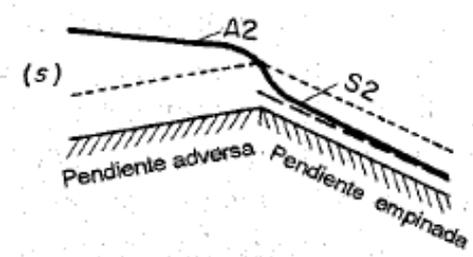
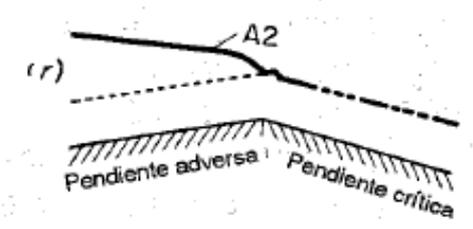
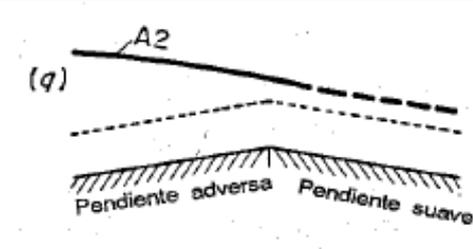
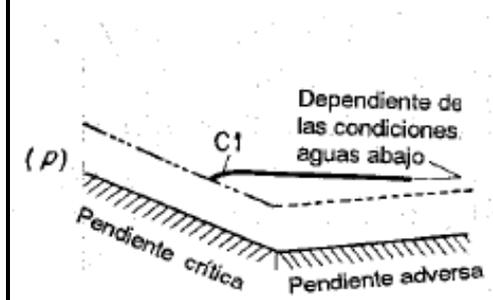
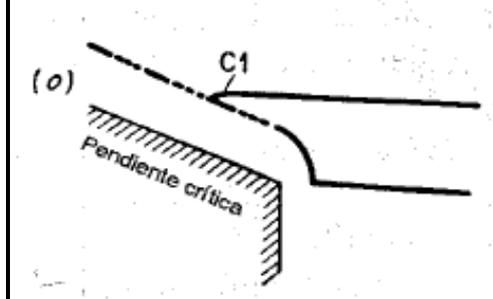
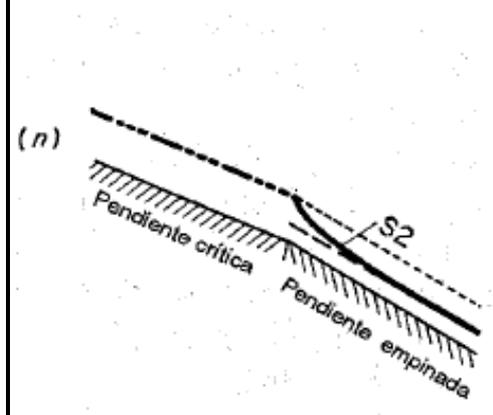
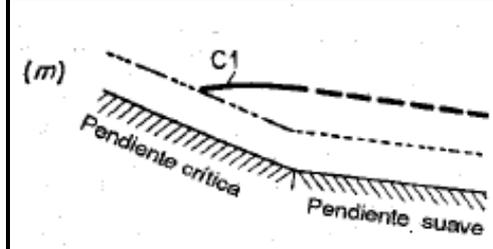
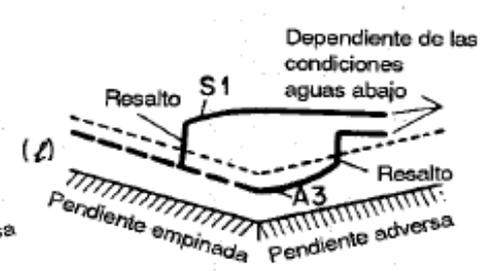
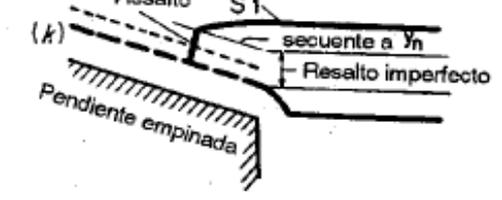
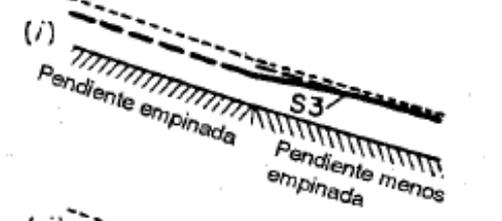
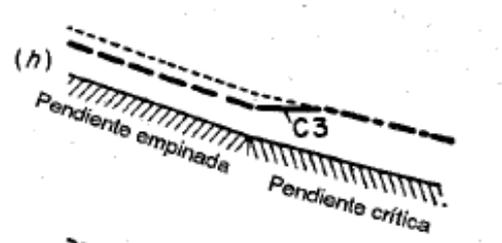
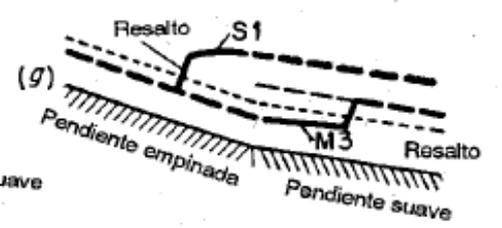
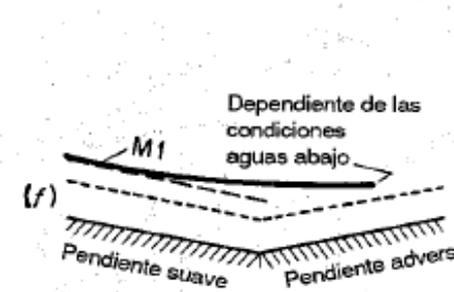
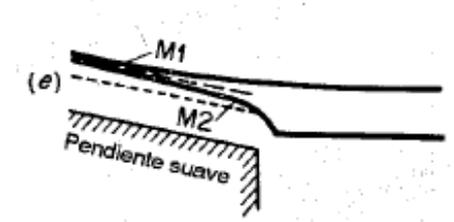
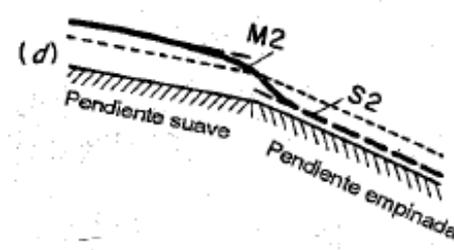
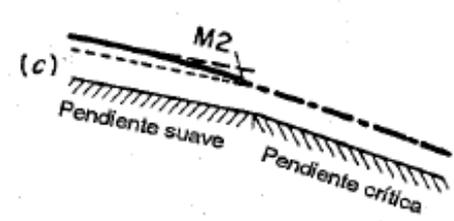
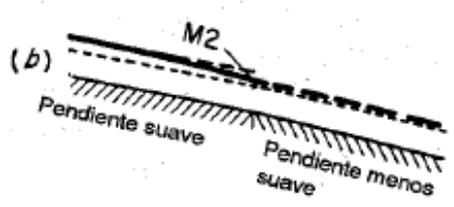
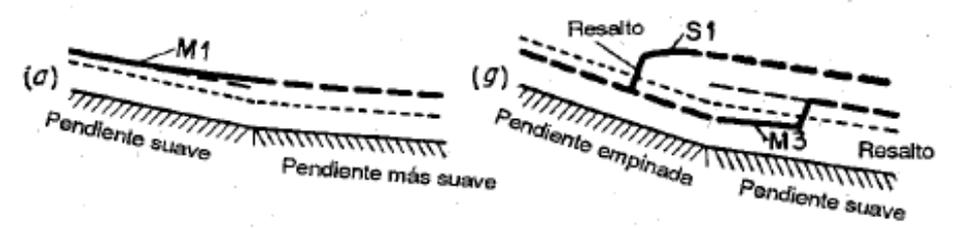


	Perfiles en la zona 1: $y > y_n$; $y > y_c$	Perfiles en la zona 2: $y_n > y > y_c$; $y > y_n$	Perfiles en la zona 3: $y < y_n$; $y < y_c$
Pendiente horizontal $y_n > y_c$	Ninguno 	H2 	H3
Pendiente suave $y_n > y_c$	M1 	M2 	M3
Pendiente crítica $y_n = y_c$	C1 	C2 	C3
Pendiente empinada $y_n < y_c$	S1 	S2 	S3
Pendiente adversa	Ninguno 	A2 	A3



5. PERFILES DE CONTINUIDAD (1)

- Los perfiles de flujo estudiados corresponden a un canal de pendiente constante; sin embargo, es común encontrar en la naturaleza cambios de pendiente y, por tanto, una combinación de perfiles que definen “perfiles de continuidad”.
- Se pueden mencionar 6 casos generales:
 - De pendiente suave a pendiente más suave
 - De pendiente suave a pendiente menos suave
 - De pendiente suave a pendiente fuerte
 - De pendiente fuerte a pendiente menos fuerte
 - De pendiente fuerte a pendiente más fuerte
 - De pendiente fuerte a pendiente suave



Las líneas gruesas indican la superficie del agua

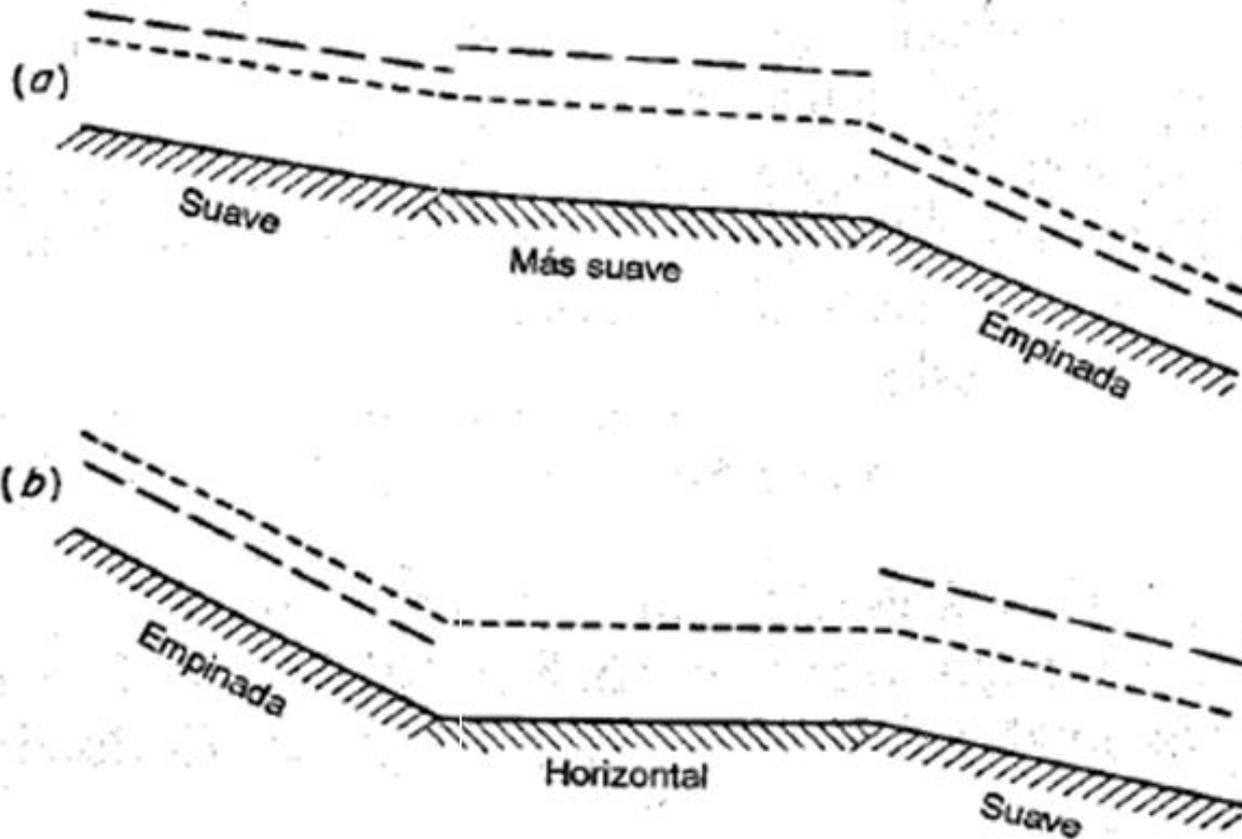


6. SECCION DE CONTROL

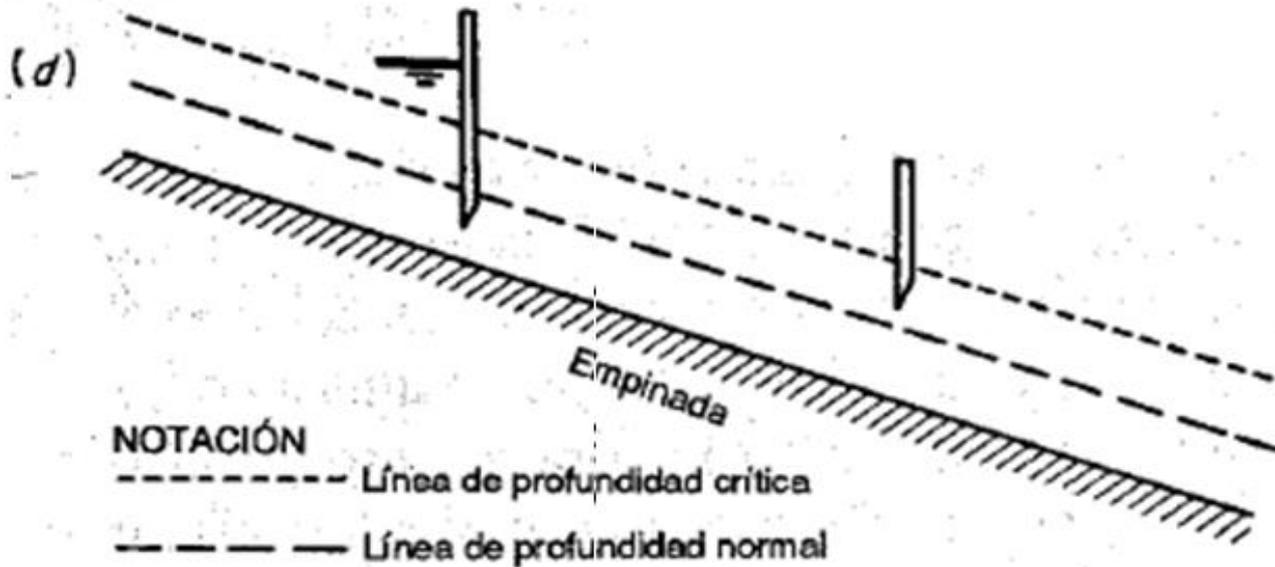
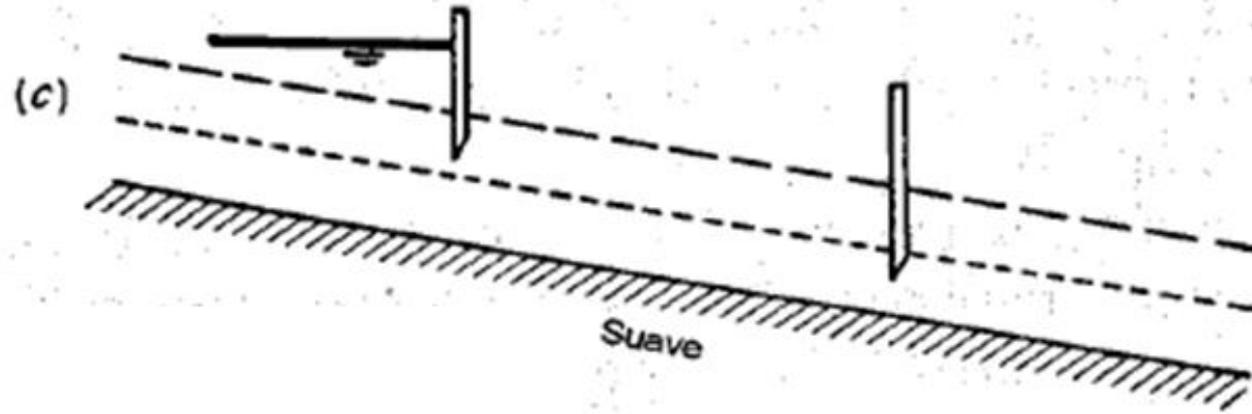
- Cuando se requiere analizar un perfil continuo donde hay presencia de varios perfiles de flujo, se recomienda establecer secciones de control.
- Una sección de control es la sección desde donde se inician los cálculos de las curvas de remanso hacia aguas arriba o hacia aguas abajo.
- Una sección de control debe de cumplir dos condiciones:
 1. La sección es físicamente ubicable; puede ser la profundidad normal, la profundidad crítica o cualquier otra conocida.
 2. El tirante real se puede calcular en función del caudal.

EJEMPLO

Esquematice los posibles perfiles de flujo en los canales mostrados

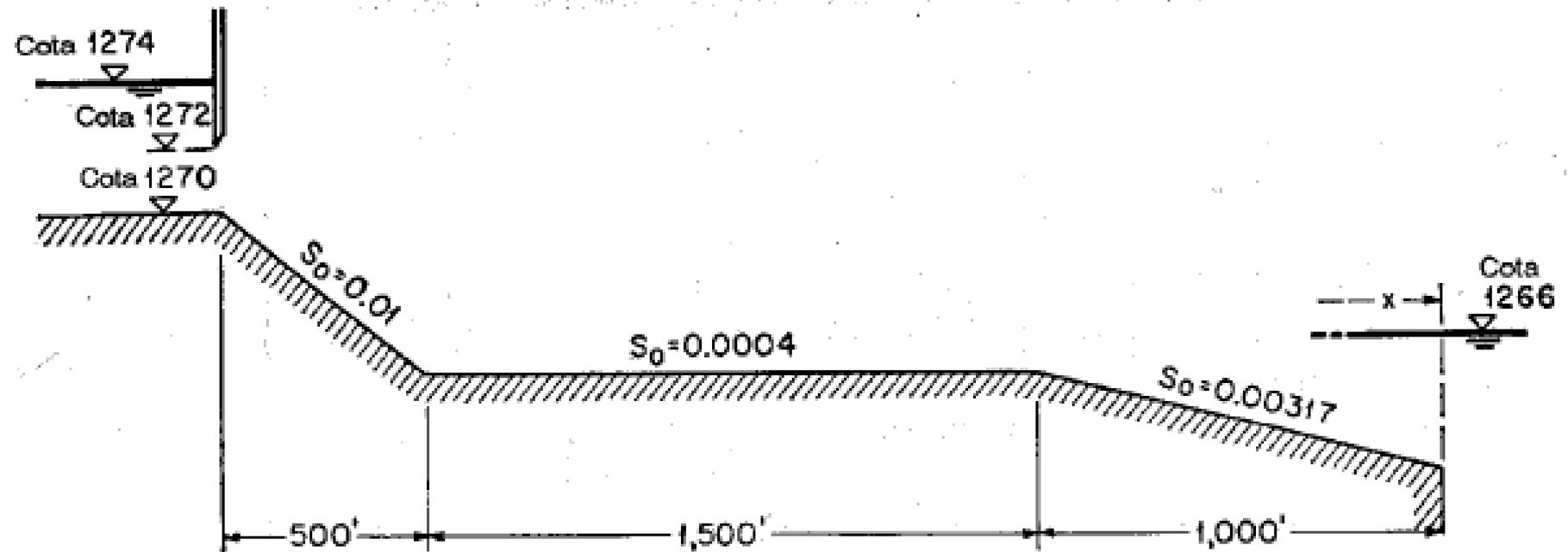


EJEMPLO



EJEMPLO

9-8. Un canal rectangular (figura 9-14) de 20 pies de ancho consta de tres tramos con pendientes diferentes. El canal tiene un coeficiente de rugosidad $n = 0.015$ y conduce un caudal de 500 pies³/s. Determine:





7. MÉTODOS DE CÁLCULO (1)

- Las ecuaciones del FGV pueden resolverse de manera numérica y proporcionar un gráfico del perfil de flujo correspondiente.
- Son muchos los métodos conocidos. Algunos de los principales son:
 - METODOS DIRECTOS
 - METODOS DE INTEGRACION

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (2)

- METODO DEL PASO DIRECTO**

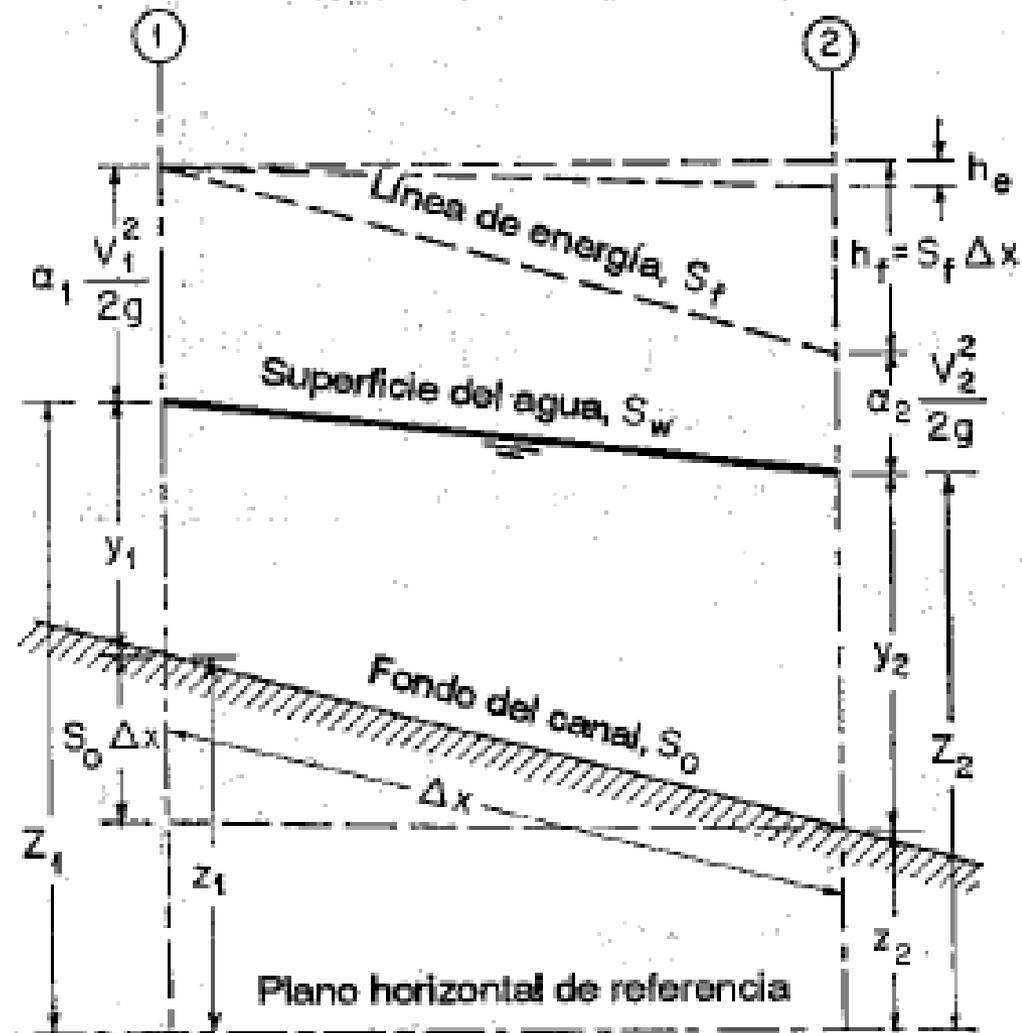
- Para dos tirantes muy cercanos y_1 y y_2 :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - F^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 - F^2}{S_0 - S_f}$$

$$dx = \frac{1 - F^2}{S_0 - S_f} dy$$

$$\int_{x_1}^{x_2} dx = \Delta x = x_2 - x_1 = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1 - F^2}{S_0 - S_f} dy$$



7. MÉTODOS DE CÁLCULO (3)

- Operando, se puede verificar que:

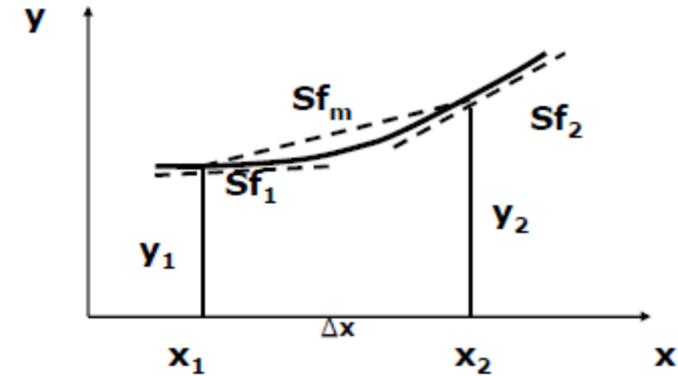
$$\Delta x = \frac{E_2 - E_1}{S_0 - S_f}$$

donde E es la energía específica:

$$E_1 = y_1 + \alpha \frac{Q^2}{2gA_1^2}$$

y:

$$E_2 = y_2 + \alpha \frac{Q^2}{2gA_2^2}$$





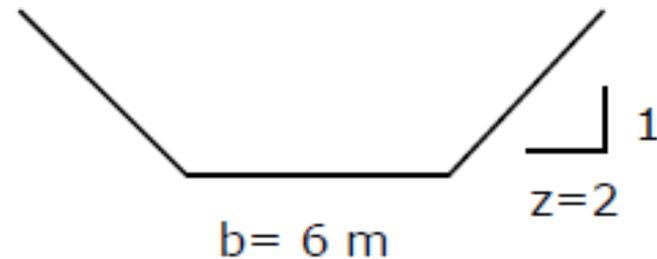
EJEMPLO

Un canal trapezoidal revestido con concreto ($n=0.016$) de ancho $b= 6.00$ m, $z=2$ y $S_0=0.0016$, conduce 11.32 m³/s de agua. Calcular el perfil de flujo creado por una presa que levanta el tirante de agua a 1.50 m. El tirante aguas arriba se considera igual al 1 % más grande que el tirante normal.

SOLUCION

De los datos:

$$\begin{aligned}
 Q &= 11.32 \text{ m}^3/\text{s} \\
 b &= 6.00 \text{ m} \\
 z &= 2 \\
 S_0 &= 0.0016 \\
 n &= 0.016 \\
 \alpha &= \mathbf{1.00}
 \end{aligned}$$



Cálculo del y_c :

Resolviendo la ecuación:

$$\alpha \frac{Q^2}{g} = \frac{A^3}{T}$$



$$y_c = \mathbf{0.66 \text{ m}}$$

Cálculo del y_n :

Resolviendo la ecuación:

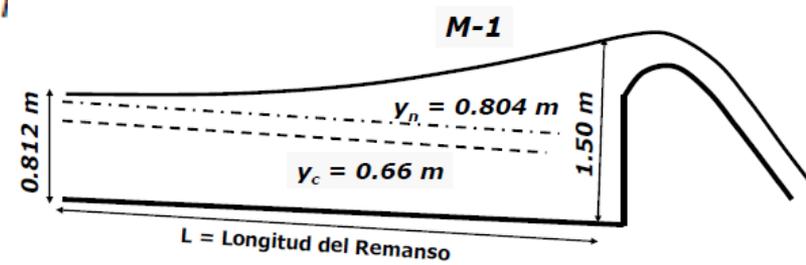
$$Q = \frac{AR^{2/3}S_0^{1/2}}{n}$$



$$y_n = \mathbf{0.804 \text{ m}}$$

Tirante aguas abajo: 1.50 m

Tirante aguas arriba: $1.01 * y_n = 0.812 \text{ m}$





7. MÉTODOS DE CÁLCULO (4)

Los métodos más conocidos son:

Tabla 9.2 Métodos existentes para integrar analíticamente la ecuación de flujo gradualmente variado. Chow, V. T. 1982.

Año de publicación	Investigador	Tipo de canal	Efecto del cambio en la energía cinética
1848	Dupuit	Rectángulo ancho	Ignorado
1860	Bresse	Rectángulo ancho	Considerado
1912 (1932)	Bakhmeteff	Todas las formas	Considerado por etapas
1930	Schoklisch	Rectángulo ancho	Ignorado
1947	Lee	Todas las formas	Considerado
1954	Keifer-Chu	Circular, pero el método puede extenderse a otras formas	Considerado

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (5)

- METODO DE INTEGRACION GRAFICA**

- Como:

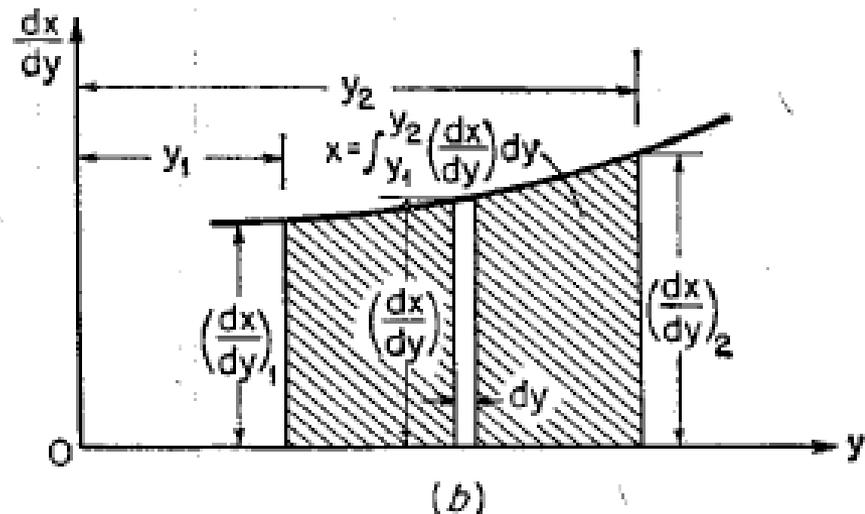
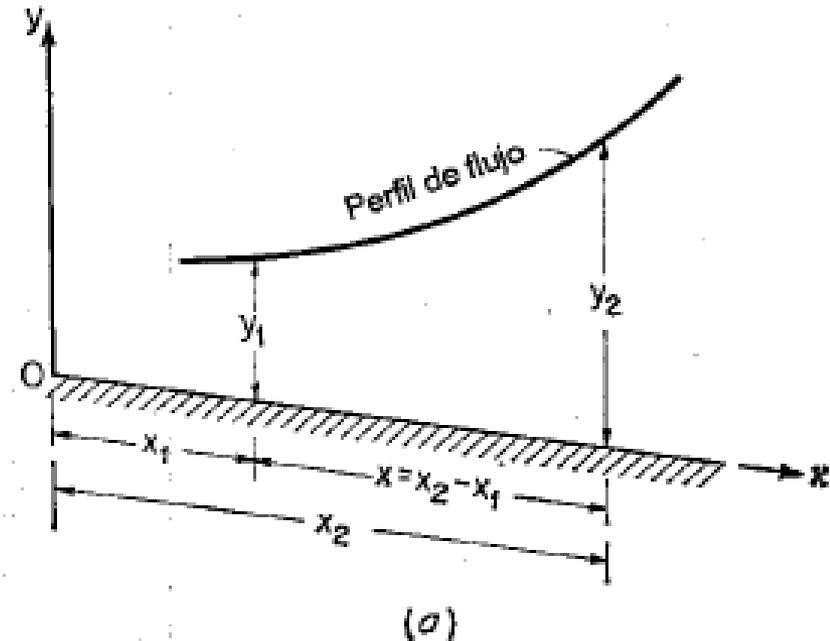
$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_o - S_f}{1 - Fr^2} \Rightarrow F(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1 - F_R^2}{S_o - S_f}$$

- Para dos tirantes muy cercanos y_1 y y_2 :

$$\text{Area} = x = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dx}{dy} dy = \left(\frac{F(y_1) + F(y_2)}{2} \right) \Delta y$$

- De esta manera se encuentra la ubicación x del tirante y_2 .

- Para el cálculo, se puede asumir un Δy constante y encontrar la ubicación de cada tirante.





EJEMPLO

Ejemplo 10-3. El agua fluye por debajo de una compuerta deslizable hacia un canal trapezoidal con $b = 20$ pies, $z = 2$, $S_0 = 0.0036$, $\alpha = 1.10$ y $n = 0.025$. La compuerta deslizable se regula para descargar $400 \text{ pies}^3/\text{s}$ con una profundidad igual a 0.55 pies en la vena contracta. Calcule el perfil de flujo. Si en el extremo de aguas abajo ocurre un resalto hidráulico, que inicia con una profundidad de 1.6 pies, determine la distancia desde la vena contracta hasta el pie del resalto.

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (6)

- **METODO DE BRESSE**

- Para canales muy anchos.
- Bresse resuelve la ecuación del FGV:

$$\int d_x = \frac{y_n}{S_o} \left[z - \int \frac{d_z}{1-Z^N} + \left(\frac{y_c}{y_n} \right)^M \int \frac{Z^{N-M}}{1-Z^N} dz \right]$$

llegando a:

$$x = \frac{y_n}{S_o} \left[z - \left(1 - \frac{yc^3}{yn^3} \right) \int \frac{dz}{1-z^3} \right] \quad \text{ó} \quad xS_o = y - y_n \left[1 - \left(\frac{yc}{yn} \right)^3 \right] \Phi$$

- Donde Φ :

$$\Phi = \int \frac{dz}{1-Z^3} = \frac{1}{6} \ln \frac{z^2 + z + 1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2z+1} + A_1$$



7. MÉTODOS DE CÁLCULO (6)

- Donde Z se define como:

$$Z = \frac{Y}{Y_n}$$

- Si se utiliza la ecuación de Chezy, la ecuación toma la forma:

$$x = \frac{Y_n}{S_0} Z - y_n \left(\frac{1}{S_0} - \frac{C^2}{g} \right) \Phi(Z)$$

- Los valores de la función de Bresse se pueden obtener de las siguientes tablas.

CUADRO 5.9. Funciones de Bresse para curvas de remanso
Curvas M1, S1 y S2

7. MÉTODOS DE CÁLCULO

- FUNCIÓN DE BRESSE**

Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$
1,000	∞	1,054	0,8714	1,29	0,3816	2,30	0,0978
1,001	2,1837	1,056	0,8599	1,30	0,3731	2,35	0,0935
1,002	1,9530	1,058	0,8499	1,31	0,3649	2,40	0,0894
1,003	1,8182	1,060	0,8382	1,32	0,3570	2,45	0,0857
1,004	1,7226	1,062	0,8279	1,33	0,3495	2,50	0,0821
1,005	1,6486	1,064	0,8180	1,34	0,3422	2,55	0,0788
1,006	1,5881	1,066	0,8084	1,35	0,3352	2,60	0,0757
1,007	1,5371	1,068	0,7990	1,36	0,3285	2,65	0,0728
1,008	1,4929	1,070	0,7900	1,37	0,3220	2,70	0,0700
1,009	1,4540	1,072	0,7813	1,38	0,3158	2,75	0,0674
1,010	1,4192	1,074	0,7728	1,39	0,3098	2,80	0,0650
1,011	1,3878	1,076	0,7645	1,40	0,3039	2,85	0,0626
1,012	1,3591	1,078	0,7565	1,41	0,2983	2,90	0,0604
1,013	1,3327	1,080	0,7487	1,42	0,2928	2,95	0,0584
1,014	1,3083	1,082	0,7411	1,43	0,2875	3,00	0,0564
1,015	1,2857	1,084	0,7337	1,44	0,2824	3,1	0,0527
1,016	1,2645	1,086	0,7265	1,45	0,2775	3,2	0,0494
1,017	1,2446	1,088	0,7194	1,46	0,2727	3,3	0,0464
1,018	1,2259	1,090	0,7126	1,47	0,2680	3,4	0,0437
1,019	1,2082	1,092	0,7059	1,48	0,2635	3,5	0,0412
1,020	1,1914	1,094	0,6993	1,49	0,2591	3,6	0,0389
1,021	1,1755	1,096	0,6929	1,50	0,2548	3,7	0,0368
1,022	1,1603	1,098	0,6867	1,52	0,2466	3,8	0,0349
1,023	1,1458	1,100	0,6806	1,54	0,2389	3,9	0,0331
1,024	1,1320	1,105	0,6659	1,56	0,2315	4,0	0,0315
1,025	1,1187	1,110	0,6519	1,58	0,2246	4,1	0,0299
1,026	1,1060	1,115	0,6387	1,60	0,2179	4,2	0,0285
1,027	1,0937	1,120	0,6260	1,62	0,2116	4,3	0,0272
1,028	1,0819	1,125	0,6139	1,64	0,2056	4,4	0,0259
1,029	1,0706	1,130	0,6025	1,66	0,1999	4,5	0,0248
1,030	1,0596	1,135	0,5913	1,68	0,1944	4,6	0,0237
1,031	1,0490	1,140	0,5808	1,70	0,1892	4,7	0,0227
1,032	1,0387	1,145	0,5707	1,72	0,1842	4,8	0,0218

7. MÉTODOS DE CÁLCULO

- **FUNCIÓN DE BRESSE**

Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$
1,033	1,0288	1,150	0,5608	1,74	0,1794	4,9	0,0209
1,034	1,0191	1,155	0,5514	1,76	0,1748	5,0	0,0201
1,035	1,0098	1,160	0,5423	1,78	0,1704	5,5	0,0166
1,036	1,0007	1,165	0,5335	1,80	0,1662	6,0	0,0139
1,037	0,9919	1,170	0,5251	1,82	0,1621	6,5	0,0118
1,038	0,9634	1,175	0,5169	1,84	0,1582	7,0	0,0102
1,039	0,9750	1,180	0,5090	1,86	0,1545	7,5	0,0089
1,040	0,9669	1,185	0,5014	1,88	0,1509	8,0	0,0077
1,041	0,9590	1,190	0,4939	1,90	0,1474	8,5	0,0069
1,042	0,9513	1,195	0,4868	1,92	0,1440	9,0	0,0062
1,043	0,9438	1,200	0,4798	1,94	0,1408	9,5	0,0055
1,044	0,9354	1,21	0,4664	1,96	0,1377	10,0	0,0050
1,045	0,9293	1,22	0,4538	1,98	0,1347	12,0	0,0035
1,046	0,9223	1,23	0,4419	2,00	0,1318	15,0	0,0022
1,047	0,9154	1,24	0,4306	2,05	0,1249	20,0	0,0013
1,048	0,9087	1,25	0,4196	2,10	0,1186	30,0	0,0006
1,049	0,9022	1,26	0,4096	2,15	0,1128	50,0	0,0002
1,050	0,8958	1,27	0,3998	2,20	0,1074	100,0	0,0001
1,052	0,8834	1,28	0,3905	2,25	0,1024	∞	0,0000

Parte 2 Para curvas M_2 , M_3 y S_3				Parte 3 Para curvas A_2 y A_3			
Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$
0,00	0,0000	0,935	1,3744	-0,00	1,2092	-1,50	0,1999
0,10	0,1000	0,940	1,4025	-0,10	1,1092	-1,55	0,1889
0,20	0,2004	0,945	1,4336	-0,15	1,0593	-1,60	0,1787
0,25	0,2510	0,950	1,4670	-0,20	1,0096	-1,65	0,1692
0,30	0,3021	0,952	1,4813	-0,25	0,9603	-1,70	0,1605
0,35	0,3538	0,954	1,4962	-0,30	0,9112	-1,75	0,1523
0,40	0,4066	0,956	1,5117	-0,35	0,8629	-1,80	0,1147
0,45	0,4608	0,958	1,5279	-0,40	0,8154	-1,85	0,1377

7. MÉTODOS DE CÁLCULO

- FUNCIÓN DE BRESSE**

Parte 2 Para curvas M_2, M_3 y S_3				Parte 3 Para curvas A_2 y A_3			
Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$	Z	$\phi(Z)$
0,56	0,5874	0,966	1,6011	-0,60	0,6381	-2,1	0,1088
0,58	0,6120	0,968	1,6220	-0,65	0,5979	-2,2	0,0996
0,60	0,6371	0,970	1,6442	-0,70	0,5597	-2,3	0,0916
0,62	0,6630	0,971	1,6558	-0,75	0,5234	-2,4	0,0845
0,64	0,6897	0,972	1,6678	-0,80	0,4894	-2,5	0,0780
0,66	0,7173	0,973	1,6803	-0,85	0,4574	-2,6	0,0723
0,68	0,7459	0,974	1,6932	-0,90	0,4274	-2,7	0,0672
0,70	0,7757	0,975	1,7066	-0,95	0,3995	-2,8	0,0626
0,71	0,7910	0,976	1,7206	-1,00	0,3736	-2,9	0,0585
0,72	0,8068	0,977	1,7351	-1,02	0,3637	-3,0	0,0548
0,73	0,8230	0,978	1,7503	-1,04	0,3541	-3,2	0,0482
0,74	0,8396	0,979	1,7661	-1,06	0,3449	-3,4	0,0428
0,75	0,8566	0,980	1,7827	-1,08	0,3359	-3,6	0,0383
0,76	0,8742	0,981	1,8001	-1,10	0,3272	-3,8	0,0344
0,77	0,8923	0,982	1,8185	-1,12	0,3187	-4,0	0,0311
0,78	0,9110	0,983	1,8379	-1,14	0,3105	-4,2	0,0282
0,79	0,9304	0,984	1,8584	-1,16	0,3026	-4,4	0,0257
0,80	0,9505	0,985	1,8803	-1,18	0,2949	-4,6	0,0235
0,81	0,9714	0,986	1,9036	-1,20	0,2875	-4,8	0,0216
0,82	0,9932	0,987	1,9287	-1,22	0,2802	-5,0	0,0199
0,83	1,0160	0,988	1,9557	-1,24	0,2733	-5,5	0,0165
0,84	1,0399	0,989	1,9850	-1,26	0,2665	-6,0	0,0139
0,85	1,0651	0,990	2,0171	-1,28	0,2599	-6,5	0,0118
0,86	1,0918	0,991	2,0526	-1,30	0,2536	-7,0	0,0102
0,87	1,1202	0,992	2,0922	-1,32	0,2474	-8,0	0,0078
0,88	1,1505	0,993	2,1370	-1,34	0,2414	-9,0	0,0062
0,89	1,1831	0,994	2,1887	-1,36	0,2357	-10,0	0,0050
0,900	1,2184	0,995	2,2498	-1,38	0,2301	-12,0	0,0035
0,905	1,2373	0,996	2,3246	-1,40	0,2246	-15,0	0,0022
0,910	1,2571	0,997	2,4208	-1,42	0,2194	-20,0	0,0013
0,915	1,2779	0,998	2,5563	-1,44	0,2143	-30,0	0,0006
0,920	1,2999	0,999	2,7877	-1,46	0,2093	-50,0	0,0002
0,925	1,3232	1,000	∞	-1,48	0,2045	∞	0,0000
0,930	1,3479						



EJEMPLO

Un canal de sección rectangular, con ancho de solera de 13m, pendiente 0.0008, coeficiente de rugosidad de 0.024, conduce un caudal de 12 m³/s. Determine la curva de remanso producida por una presa que origina una profundidad de 4m



SOLUCIÓN EJEMPLO

- Primero, calculamos Y_c , Y_n , y las pendientes normal y crítica, y definimos el tipo de curva : M1.
- Calculamos de aguas abajo hacia aguas arriba.

Nº	Y	Z = Y/Yn	1912,80 Z	$\Phi(Z)$	1532,34 ΦZ	X	L
1	4,00	2,614	5000,000	0,0748	114,61922 42	4885,381	0,000
2	3,59	2,347	4488,655	0,0935	143,27403 02	4345,381	540,000
3	3,18	2,079	3977,309	0,1318	201,96275 06	3775,347	1110,034
4	2,77	1,812	3465,964	0,166	254,36886 65	3211,595	1673,786
5	2,36	1,545	2954,619	0,2389	366,07663 98	2588,542	2296,839
6	1,95	1,277	2443,273	0,3816	584,74192 44	1858,531	3026,849
7	1,55	1,010	1931,928	1,0192	1561,7635 47	370,164	4515,216

7. MÉTODOS DE CÁLCULO ()



		Nomenclatura	Geometría de la curva de remanso y sentido de aplicación de los métodos de cálculo.	Profundidad en el sentido del flujo	$\frac{dy}{dx}$	Ejemplo de presentación de la curva	Observaciones
pendiente positiva, suave o subcrítica	$S_0 > 0$						
	$S_0 < S_C$						
	$Y_n > Y_C$						
	perfil en la zona 1 $y > y_n$ $y > y_c$ $S_0 > S_E$	M₁		AUMENTA	$\frac{+}{+} = +$		Se presenta en estructuras de control, como vertederos y compuertas, o en accidentes como estrechamientos o curvas, los cuales producen un efecto de remanso en el flujo. Su longitud puede ser de varios kilómetros
	perfil en la zona 2 $y_n \leq y < y_c$ ó $y_c \leq y < y_n$ $S_0 \leq S_E$ ó $S_0 \geq S_E$	M₂		DISMINUYE	$\frac{-}{+} = -$		Ocurre en pendiente suave, cuando el tirante se reduce, por ejemplo, en un estrechamiento de la sección, o en la proximidad de una rápida o una caída. Este perfil es corto en comparación con el M ₁ .
	perfil en la zona 3 $y < y_n$ $y < y_c$ $S_0 < S_E$	M₃		AUMENTA	$\frac{-}{-} = +$		Se puede encontrar, aguas debajo de un cambio de pendiente supercrítico a subcrítico, o después de la descarga de una compuerta. Está regido por las condiciones aguas abajo y termina regularmente en un resalto, es un perfil corto.

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (8)



		Nomenclatura	Geometría de la curva de remanso y sentido de aplicación de los métodos de cálculo.	Profundidad en el sentido del flujo	$\frac{dy}{dx}$	Ejemplo de presentación de la curva	Observaciones
pendiente positiva, suave o supercrítica	$y_n < y_c$	S_1		AUMENTA	$\frac{+}{+} = +$		Es producido por una estructura de control, como una presa o compuerta de control, situada en un tramo en gran pendiente. Principia después de un resalto y termina en la obstrucción.
	$S_0 > S_c$	S_2		DISMINUYE	$\frac{+}{-} = -$		Es generalmente muy corto y se encuentra comúnmente a la entrada de un tramo de gran pendiente o aguas debajo de un cambio de pendiente suave a fuerte.
	$S_0 > 0$	S_3		AUMENTA	$\frac{-}{-} = +$		Se puede producir aguas debajo de una compuerta, situada en un canal de gran pendiente, o aguas debajo de la intersección de un cambio de un tramo con gran pendiente, a otro con menos pendiente.

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (9)

		Nomenclatura	Geometría de la curva de remanso y sentido de aplicación de los métodos de cálculo.	Profundidad en el sentido del flujo	$\frac{dy}{dx}$	Ejemplo de presentación de la curva	Observaciones
pendiente crítica	$y_n = y_c$	C₁		AUMENTA	$\frac{+}{+} = +$		Debiera ser un perfil aproximadamente horizontal, pero como se intuye, la inestabilidad propia del estado crítico, se manifiesta en la forma de una ondulación superficial apreciable.
	$S_0 = S_C$	C₂		CONSTANTE	$\frac{dy}{dx} = 0$		No es una curva de remanso, sino una recta, ya que como se observa, establece la formación de un régimen uniforme y crítico, para las condiciones dadas.
	$S_0 > 0$	C₃		AUMENTA	$\frac{-}{-} = +$		Lo mismo que para C ₁

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (10)

		Nomenclatura	Geometría de la curva de remanso y sentido de aplicación de los métodos de cálculo.	Profundidad en el sentido del flujo	$\frac{dy}{dx}$	Ejemplo de presentación de la curva	Observaciones
pendiente horizontal	$y_n \rightarrow \infty$	H₁			NO EXISTE		Debido a que el tirante normal es infinito, no puede existir ninguna curva de remanso generada en la zona 1, para este tipo de pendiente de fondo
	$y_n > y_c$	H₂		DISMINUYE	$\frac{dy}{dx} = -$		La curva H ₂ es el límite inferior de la M ₂ .
	$S_0 = 0$	H₃		AUMENTA	$\frac{dy}{dx} = +$		La curva H ₃ es el límite inferior de la M ₃

7. MÉTODOS DE CÁLCULO (11)

		Nomenclatura	Geometría de la curva de remanso y sentido de aplicación de los métodos de cálculo.	Profundidad en el sentido del flujo	$\frac{dy}{dx}$	Ejemplo de presentación de la curva	Observaciones
pendiente negativa, adversa o contrapendiente $S_0 < 0$	y_n no existe						
	perfil en la zona 1 $y > y_n$ $y > y_c$ $S_0 > S_E$	A₁	Ninguna 		NO EXISTE		Por no estar definida la ubicación del tirante normal, no se puede generar ninguna curva de remanso en la zona 1, para este tipo de pendiente de fondo
	perfil en la zona 2 $y_n \leq y \leq y_c$ ó $y_c \leq y \leq y_n$ $S_0 \leq S_E$ ó $S_0 \geq S_E$	A₂	Cálculo 	DISMINUYE	$\frac{-}{+} = -$		La pendiente negativa es rara. Los perfiles generados en esta pendiente de fondo son extremadamente cortos.
perfil en la zona 3 $y < y_n$ $y < y_c$ $S_0 < S_E$	A₃	Cálculo 	AUMENTA	$\frac{-}{-} = +$		Lo mismo que para A ₂ .	