

TRÁNSITO HIDRÁULICO

Flujo en Superficie Libre



UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E
HIDROLOGÍA



1. INTRODUCCIÓN

- El flujo de agua en cauces naturales y la escorrentía sobre la cuenca son procesos distribuidos o fenómenos hidráulicos porque el caudal, la velocidad y la profundidad varían en el espacio. Las estimaciones a lo largo de estos cauces o ríos pueden obtenerse utilizando el modelo de tránsito hidráulico. Este tipo de modelos está basado en ecuaciones diferenciales parciales (ecuaciones de Saint- Venant) que permiten el cálculo del caudal y del nivel de agua como funciones del espacio y del tiempo.
- Como alternativa al uso de un modelo de tránsito hidráulico de avenidas, está el uso de un modelo hidrológico para calcular el caudal en el lugar deseado y luego calcular el correspondiente nivel de agua suponiendo un flujo permanente no uniforme a lo largo del canal en ese lugar. La ventaja de un modelo hidráulico es que calcula el caudal y el nivel de agua simultáneamente y no por separado, de tal manera que el modelo aproxima mejor la naturaleza de flujo no permanente no uniforme propio de la propagación de una onda de avenida en el canal.



2. TRÁNSITO HIDRÁULICO (1)

- Los modelos de tránsito hidráulico pueden utilizarse para describir la transformación de lluvia en escorrentía en una cuenca para producir el hidrograma de flujo a la salida de ésta, y luego tomar este hidrograma como la información de entrada en el extremo aguas arriba de un río o un sistema de tuberías y transitarlo hacia el extremo aguas abajo.
- El proceso real de flujo en ríos varían en las tres dimensiones espaciales; sin embargo, para muchas aplicaciones prácticas, las variaciones espaciales de la velocidad a lo ancho del canal y con respecto a la profundidad pueden ignorarse, de tal manera que el flujo puede aproximarse como unidimensional a lo largo del canal o en la dirección de flujo.
- Las ecuaciones de Saint Venant, desarrolladas por Barre de Saint Venant en 1871, describen el flujo unidimensional no permanente en un canal abierto, que es aplicable en este caso.

3. ECUACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE LA MASA (1)

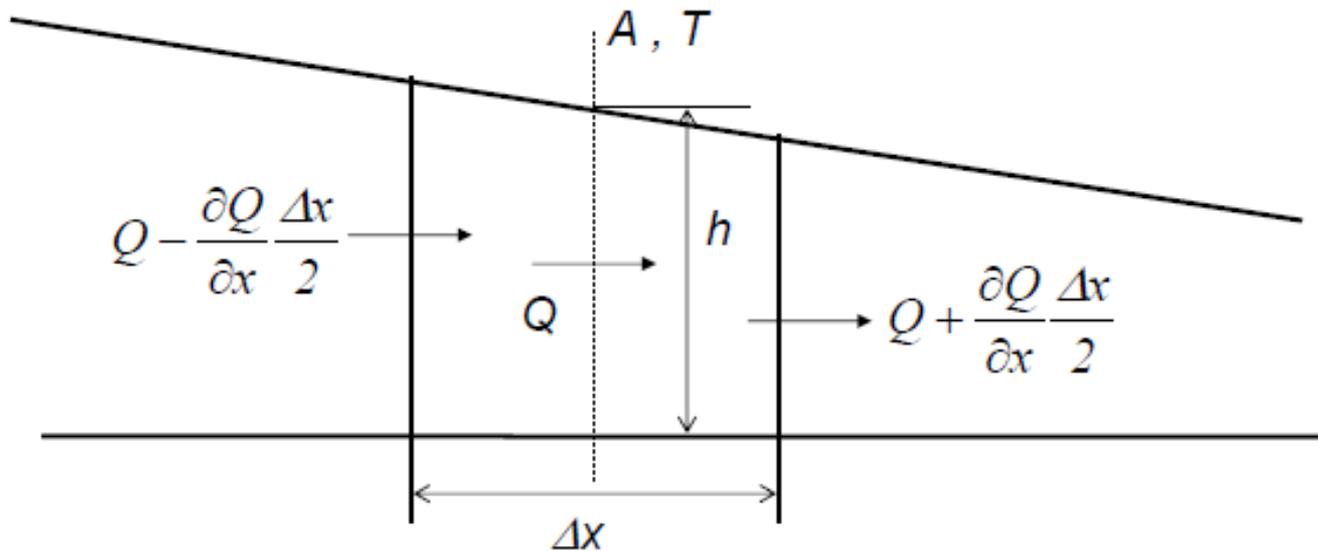


Figura N° 1: Descarga a través de un volumen de control elemental

Con referencia al volumen de control de la Figura 1: Q , h , A y T son la descarga, el tirante, el área mojada y el espejo de agua en el centro del volumen de control respectivamente en el instante t . El principio de conservación de masa implica que el flujo neto a través del volumen de control en el intervalo Δt debe ser igual al cambio en volumen del volumen de control en el mismo intervalo:

3. ECUACIÓN DE LA CONSERVACIÓN DE LA MASA (2)

$$\left[\left(Q - \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \right] \Delta t = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x \Delta t = \frac{\partial(A \Delta x)}{\partial t} \Delta t$$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de masa resulta:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

En términos de la velocidad: $Q = UA$, se obtiene:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(AU)}{\partial x} = B \frac{\partial h}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + BU \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Para un canal rectangular: $A = Bh$, por lo que la ecuación (3) se reduce a:

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial x} + \frac{\partial(h)}{\partial t} = U \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial(h)}{\partial t} = 0$$

En caso de existir un flujo de salida o entrada lateral al canal, en el tramo considerado, se tiene:

$$\frac{\partial(AU)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = \pm q$$

4. ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (1)

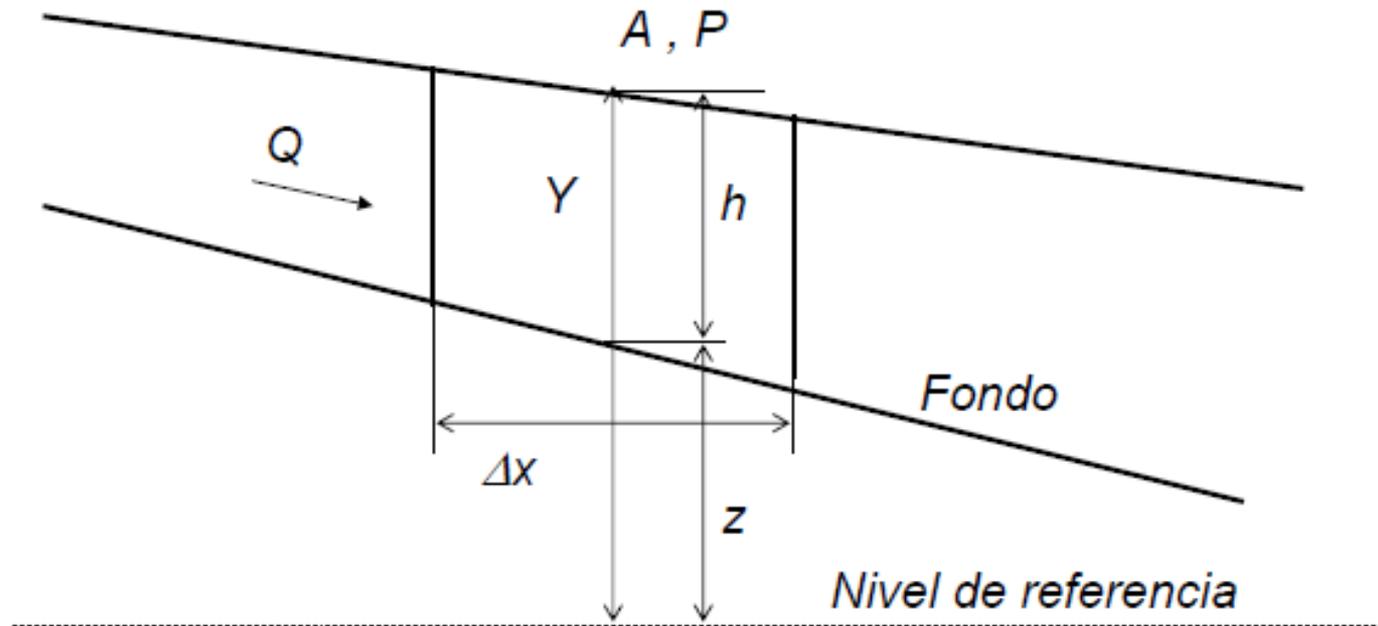


Figura N° 2: Esquema para la deducción de la ecuación de momento

Es conocido que la aceleración total en la dirección del flujo es:

$$a = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x}$$

La ecuación de movimiento para el tramo considerado es:

$$\rho A \Delta x \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\rho g A \Delta Y - \tau_0 P \Delta x$$



4. ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (2)

Teniendo en consideración que: $\tau_0 = \rho g R S_f$, $P = A/R$, $\Delta Y/\Delta x \cong \partial Y/\partial x$, $Y = z + h$ y $\partial z/\partial x = -S_o$ la ecuación anterior se transforma en términos de la velocidad y profundidad en:

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial t}}_{\text{aceleración local}} + U \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{\text{aceleración convectiva}} + g \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{fuerza presión}} + \underbrace{g}_{\text{fuerza gravedad}} \underbrace{(S_f - S_o)}_{\text{fuerza fricción}} = 0$$

En términos de la velocidad y área se tiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{B} \frac{\partial A}{\partial x} + (S_f - S_o) = 0$$

En términos del caudal, área y profundidad se tiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_o) = 0$$



4. ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (3)

Modelo de Onda Cinemática: $gA(S_f - S_o) = 0$

Modelo de Onda de Difusa: $gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_o) = 0$

Modelo de Onda Dinámica: $\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} + gA(S_f - S_o) = 0$

Criterios de Ponce V. M., para la definición del tipo de onda:

$$TS_o \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \geq 171$$

$$30 \leq TS_o \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} < 171$$

$$TS_o \left(\frac{g}{h} \right)^{\frac{1}{2}} < 30$$

Onda Cinemática

Onda de Difusa

Onda Dinámica

Siendo T el período de la onda, g la aceleración de la gravedad y h la profundidad media.

4. ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (4)

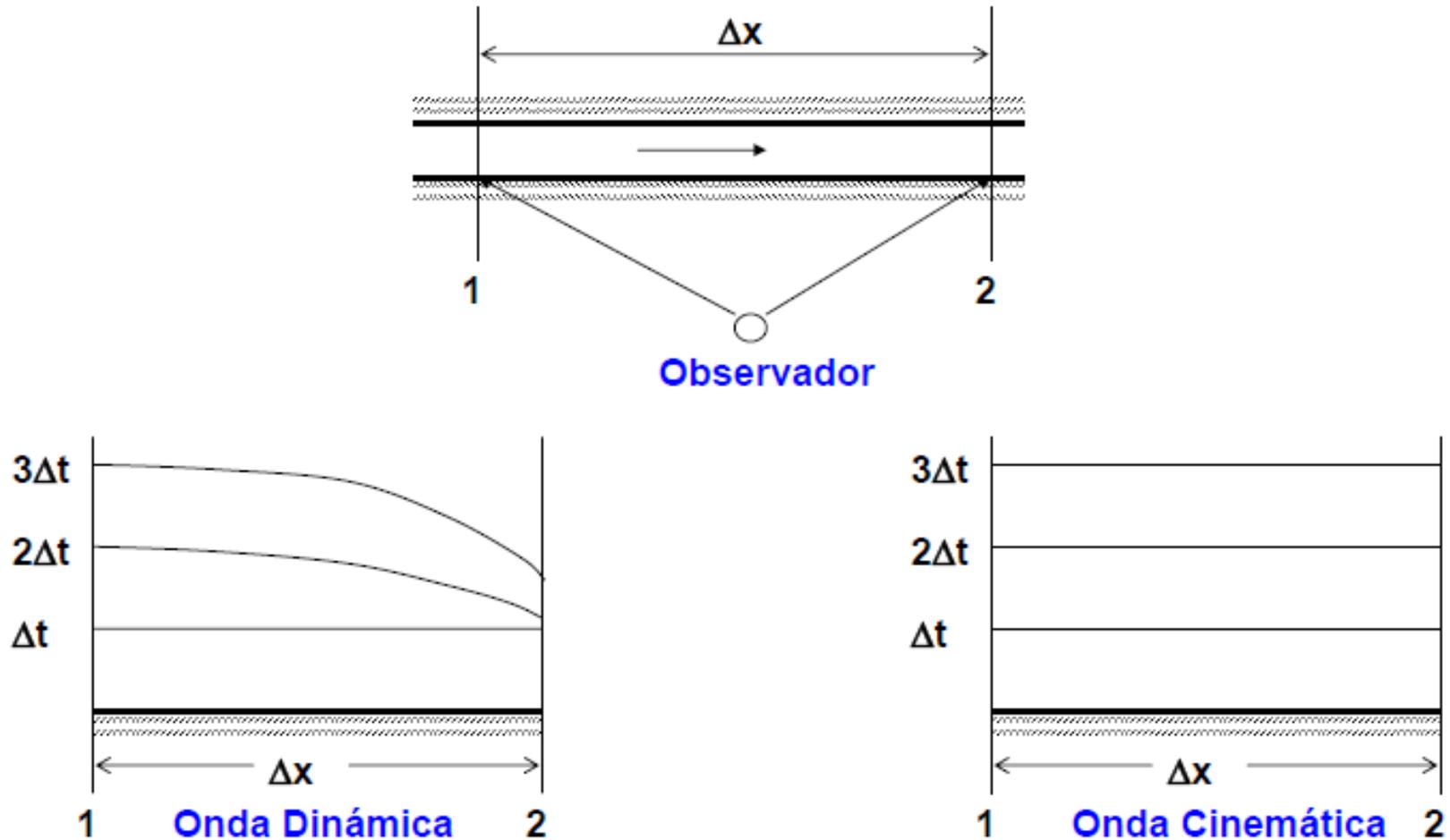


Figura N° 3: Ondas Dinámica y Cinemática Vistas por un Observador



4. ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (5)

- Las ondas cinemáticas dominan el flujo cuando las fuerzas inerciales y de presión no son importantes y las ondas dinámicas dominan el flujo cuando estas fuerzas son importantes, como el movimiento de una gran onda de avenida en un río ancho.
- En una onda cinemática, las fuerzas de gravedad y de fricción están balanceadas de tal manera que el flujo no se acelera apreciablemente.
- Para una onda cinemática, la línea de energía total es paralela al fondo del canal y el flujo es uniforme y permanente ($S_o = S_f$) dentro del tramo considerado, mientras que para una onda dinámica la línea de energía total y la elevación de la superficie de agua no son paralelas al lecho en el tramo diferencial considerado.



5. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE ONDA CINEMÁTICA(1)

- Una onda es una variación del flujo ya sea como un cambio en el caudal o en la elevación de la superficie del agua, y la celeridad de onda es la velocidad con la cual esta variación se mueve a lo largo del canal.
- La celeridad depende del tipo de onda que se considere y puede ser muy diferente a la velocidad del agua.
- Las ecuaciones del modelo son:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = q$$

Conservación
de masa

$$(S_f - S_o) = 0$$

Conservación
de Momento

$$A = \alpha Q^\beta$$

Relación General
entre A y Q

$$A = \alpha Q^\beta = \left(\frac{nP^{2/3}}{\sqrt{S_o}} \right)^{3/5} Q^{3/5}$$

Ecuación de
Manning

5. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE ONDA CINEMÁTICA(2)

- Derivando la ecuación del área respecto al tiempo:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha\beta Q^{\beta-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad \text{ó} \quad \frac{dQ}{dA} = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}}$$

- Reemplazando en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha\beta Q^{\beta-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q$$

- Como el caudal depende de la dirección x y del tiempo t:

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{dt}{dx} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dx}$$

- Esta derivada será igual a la ecuación de continuidad si:

$$\frac{dQ}{dx} = q \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha\beta Q^{\beta-1}}$$





5. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE ONDA CINEMÁTICA(3)

- Comparando el resultado final con la derivada inicial, se concluye que:

$$c = \frac{dQ}{dA} = \frac{dx}{dt}$$

- donde c es la celeridad de onda cinemática.
- Las ecuaciones $dQ/dx = q$ y $dQ/dA = dx/dt$ son **ecuaciones características** para una onda cinemática, dos ecuaciones diferenciales ordinarias que son matemáticamente equivalentes a las ecuaciones de continuidad y de momento.
- La solución de las ecuaciones de onda cinemática permite determinar la distribución del flujo como una función de la distancia, x , y del tiempo t .
- La solución puede obtenerse numéricamente utilizando aproximaciones de diferencias finitas o analíticamente resolviendo en forma simultánea las ecuaciones características anteriores.



6. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ONDA CINEMÁTICA(1)

- En el análisis anterior se encontró que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \alpha \beta Q^{\beta-1} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} \right) = q$$

- El objetivo de la solución numérica es resolver la ecuación anterior para determinar el hidrograma de salida $Q(x,t)$ en cada uno de los puntos de la malla $x-t$, dados los parámetros del canal α y β , el flujo lateral $q(t)$ y las condiciones iniciales y de contorno o frontera.
- La solución numérica es más flexible que la analítica y puede manejar con mayor facilidad las variaciones en las propiedades del canal y en las condiciones iniciales y de frontera.
- Ya que Q depende de x y t , se establece un sistema cartesiano t vs. x , y se dibuja un elemento diferencial.

6. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ONDA CINEMÁTICA(2)

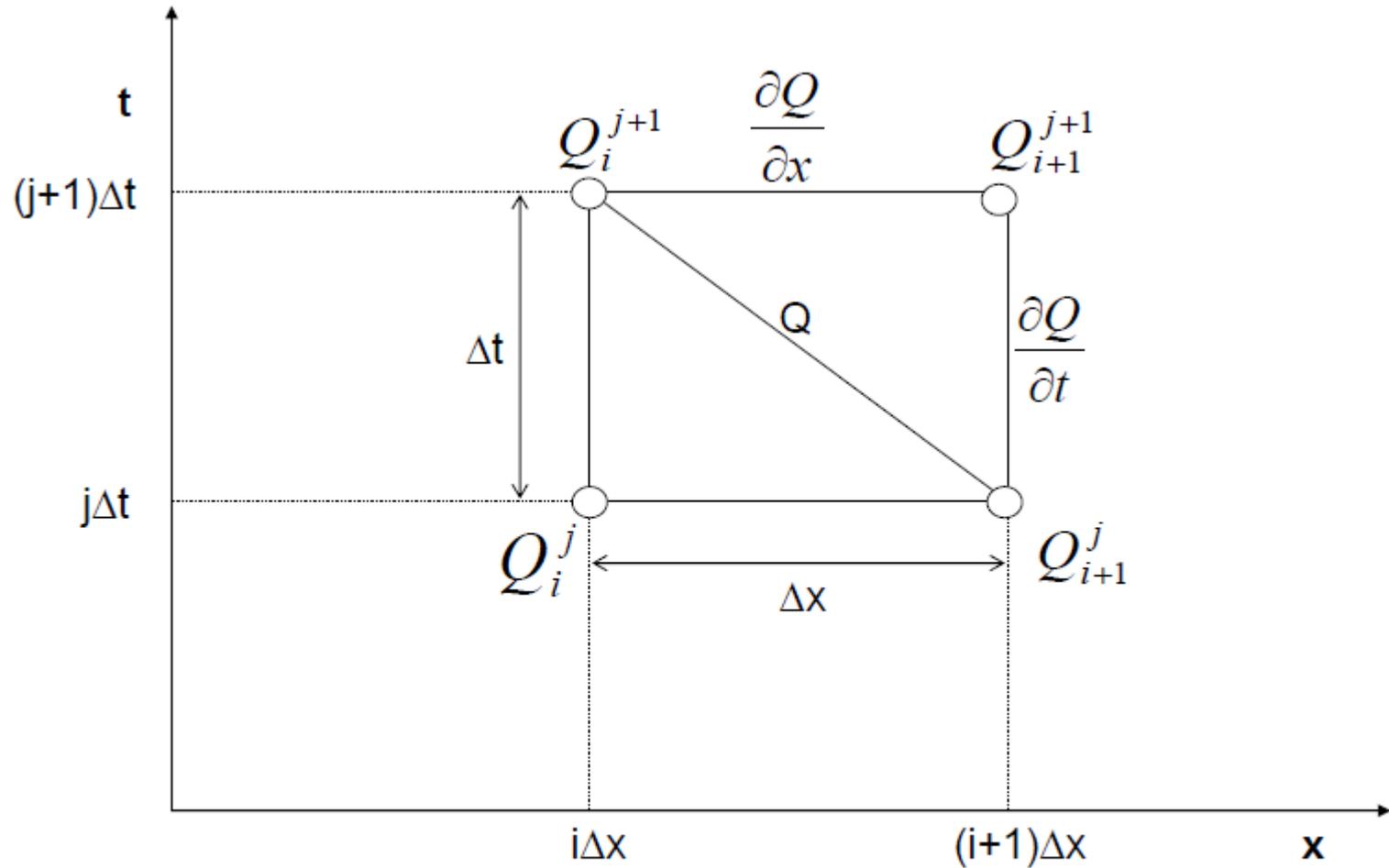


Figura 4: Esquema de Diferencias Finitas para la Solución de la Ecuación de Onda Cinemática



6. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ONDA CINEMÁTICA(3)

Para resolver la ecuación en forma numérica, las derivadas espaciales y temporales de Q se aproximan en la malla $x-t$ tal como se muestra en la figura 4. El valor desconocido es Q_{i+1}^{j+1} . Los valores de en la j -ésima línea de tiempo se han determinado previamente, lo mismo que Q_i^{j+1} . A continuación se describe el *esquema lineal* de discretización para plantear las ecuaciones en diferencias finitas, en el cual Q_{i+1}^{j+1} se calcula como una función lineal de los valores conocidos de Q .

Con el fin de plantear las ecuaciones de diferencias finitas se usa un método de diferencias regresivas o hacia atrás. La forma de diferencias finitas de la derivada espacial de Q_{i+1}^{j+1} se encuentra sustituyendo los valores de Q en la $(j+1)$ -ésima línea de tiempo.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x}$$

La forma en diferencias finitas de la derivada temporal se encuentra de manera similar al sustituir los valores de Q en la $(j+1)$ -ésima línea de distancia.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_{i+1}^j}{\Delta t}$$

6. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ONDA CINEMÁTICA(4)

Si se utilizara el valor Q_{i+1}^{j+1} en lugar de Q en el término $\alpha\beta Q^{\beta-1}$ de la ecuación de onda, la ecuación resultante sería no lineal en Q_{i+1}^{j+1} . Para crear una ecuación lineal, el valor de Q usado en el término $\alpha\beta Q^{\beta-1}$ es el promedio de los valores de la diagonal:

$$Q \cong \frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2}$$

El valor del caudal lateral, q , se encuentra promediando los valores en la $(i + 1)$ -ésima línea de distancia (dados en el problema):

$$q \cong \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2}$$

Finalmente la forma de diferencias finitas de la onda cinemática lineal es:

$$\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^{j+1}}{\Delta x} + \alpha\beta \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \left(\frac{Q_{i+1}^{j+1} - Q_i^j}{\Delta t} \right) = \frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2}$$

$$Q_{i+1}^{j+1} = \frac{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x} Q_i^{j+1} + \alpha\beta Q_{i+1}^j \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right) + \Delta t \left(\frac{q_{i+1}^{j+1} + q_{i+1}^j}{2} \right) \right]}{\left[\frac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha\beta \left(\frac{Q_{i+1}^j + Q_i^{j+1}}{2} \right)^{\beta-1} \right]}$$



7. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE SAINT VENANT

- Las ecuaciones de Saint Venant conformados por la ecuación de conservación de masa y de momento o cantidad de movimiento son ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de tipo hiperbólico con coeficientes variables en general.
- Debido a dificultades matemáticas, estas ecuaciones no pueden ser integrados de manera exacta, introduciéndose por lo tanto muchas simplificaciones.
- Existen varios métodos para la solución de ecuaciones diferenciales hiperbólicas en derivados parciales, que describe el flujo inestable unidimensional en ríos, estos son: **el método de las características, el método de diferencias finitas, el método de los elementos finitos y el método de los volúmenes finitos.**



8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (1)

- Está basado en ecuaciones básicas escritas en forma característica.
- El método de la características puede ser descrito como una técnica donde la solución de dos ecuaciones diferenciales simultáneas en derivadas parciales, pueden ser reemplazados por un problema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias.
- El método de las características puede orientarse a problemas impuestos por la naturaleza, pero con serias dificultades, sin embargo este método tiene un papel importante en determinar los valores de frontera en muchos puntos fijos para el método de diferencias finitas.



8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (2)

Escribiendo las ecuaciones de conservación de masa y de momento de la forma siguiente:

$$\lambda \left[B \frac{\partial h}{\partial t} + BU \frac{\partial h}{\partial x} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_f - S_o) = 0 \quad (2)$$

sumando y ordenando convenientemente las ecuaciones

$$L = \left[\frac{\partial U}{\partial t} + (U + \lambda A) \frac{\partial U}{\partial x} \right] + \lambda B \left[\left(U + \frac{g}{\lambda B} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right] + g(S_f - S_o) = 0 \quad (3)$$

En la ecuación anterior, dos valores reales distintos de λ pueden proporcionar dos ecuaciones en términos de dos variables U y h, que de alguna manera representan las ecuaciones de conservación de masa y momento.

8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (3)

Una selección apropiada de dos valores particulares de λ permite simplificar la ecuación anterior. En general las variables U y h son funciones de x y t . Si consideramos que la variable independiente x es función del tiempo t , se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4)$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (5)$$

Ahora, examinando las tres últimas ecuaciones, se puede notar que:

$$\frac{dx}{dt} = U + \lambda A = U + \frac{g}{\lambda B} \quad (6)$$

por lo que la ecuación (3) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{dU}{dt} + \lambda B \frac{dh}{dt} + g(S_f - S_o) = 0 \quad (7)$$

La solución de la ecuación (6) permite obtener dos valores particulares de λ :

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{AB}} \quad (8)$$

Reemplazando estos valores de λ en la ecuación (6), se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = U \pm \sqrt{\frac{gA}{B}} = U \pm c \quad (9)$$



8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (4)

donde c es la celeridad de onda que para el caso de canal rectangular se simplifica a: $c = (gh)^{1/2}$. Si el valor positivo de λ es usado en la ecuación (7) el valor positivo de λ debe ser usado en la ecuación (9); existiendo similar paralelismo para los valores negativos. La substitución de estos valores de λ en la ecuación (7) permite obtener dos pares de ecuaciones que pueden ser agrupados e identificados como ecuaciones C^+ y C^-

$$C^+ \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} + \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + g(S_f - S_o) = 0 \quad (10) \\ \frac{dx}{dt} = U + c \quad (11) \end{array} \right.$$

$$C^- \left\{ \begin{array}{l} \frac{dU}{dt} - \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} + g(S_f - S_o) = 0 \quad (12) \\ \frac{dx}{dt} = U - c \quad (13) \end{array} \right.$$

8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (5)

De esta manera los dos valores reales de λ fueron usadas para convertir las dos ecuaciones diferenciales parciales en dos ecuaciones diferenciales totales. Si las variables dependientes son conocidas en A y B, las ecuaciones del (10) al (13) pueden ser integradas en términos de las 4 variables desconocidas en P.

$$C^+ \left| \begin{array}{l} U_P - U_A + g \int_{h_A}^{h_P} \frac{1}{c} dh + \int_{t_A}^{t_P} g(S_f - S_o) dt = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

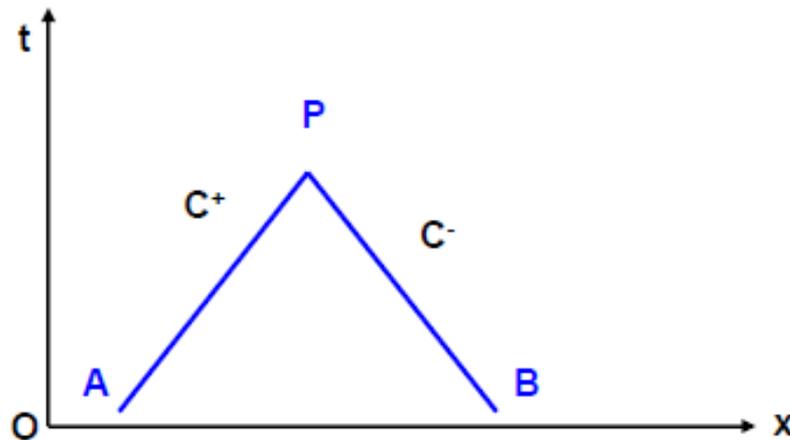
$$x_P - x_A = \int_{t_A}^{t_P} g(U + c) dt \quad (15)$$

$$C^- \left| \begin{array}{l} U_P - U_B - g \int_{h_B}^{h_P} \frac{1}{c} dh + \int_{t_B}^{t_P} g(S_f - S_o) dt = 0 \end{array} \right. \quad (16)$$

$$x_P - x_B = \int_{t_B}^{t_P} g(U - c) dt \quad (17)$$

8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (6)

Es conveniente visualizar como la solución se desarrolla en el plano de variables independientes (x,t) de la Figura 4. La integración de las ecuaciones del (14) al (17), generalmente, son hechas mediante la regla trapezoidal lo que genera un conjunto de ecuaciones algebraicas que conducen a una solución estable, siempre que sea satisfecha la condición de COURANT-LEWY-FRICDRICHS:



$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|U| + c} \quad (18)$$

Figura N° 4: Líneas Características en el Plano x-t

Las ecuaciones resultantes son no lineales y será necesario un procedimiento iterativo para su solución como el método de Newton-Raphson.



8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (7)

Alternativamente puede considerarse la integración de primer orden como satisfactorio, en la mayoría de los casos. Esto permite una solución explícita el cual es estable cuando el flujo lateral y la fricción son pequeñas. El canal debe ser dividido en tramos iguales Δx y debe ser seleccionado un apropiado Δt de modo que satisfaga la condición de Courant. La integración de primer orden de las ecuaciones del (14) al (17) son:

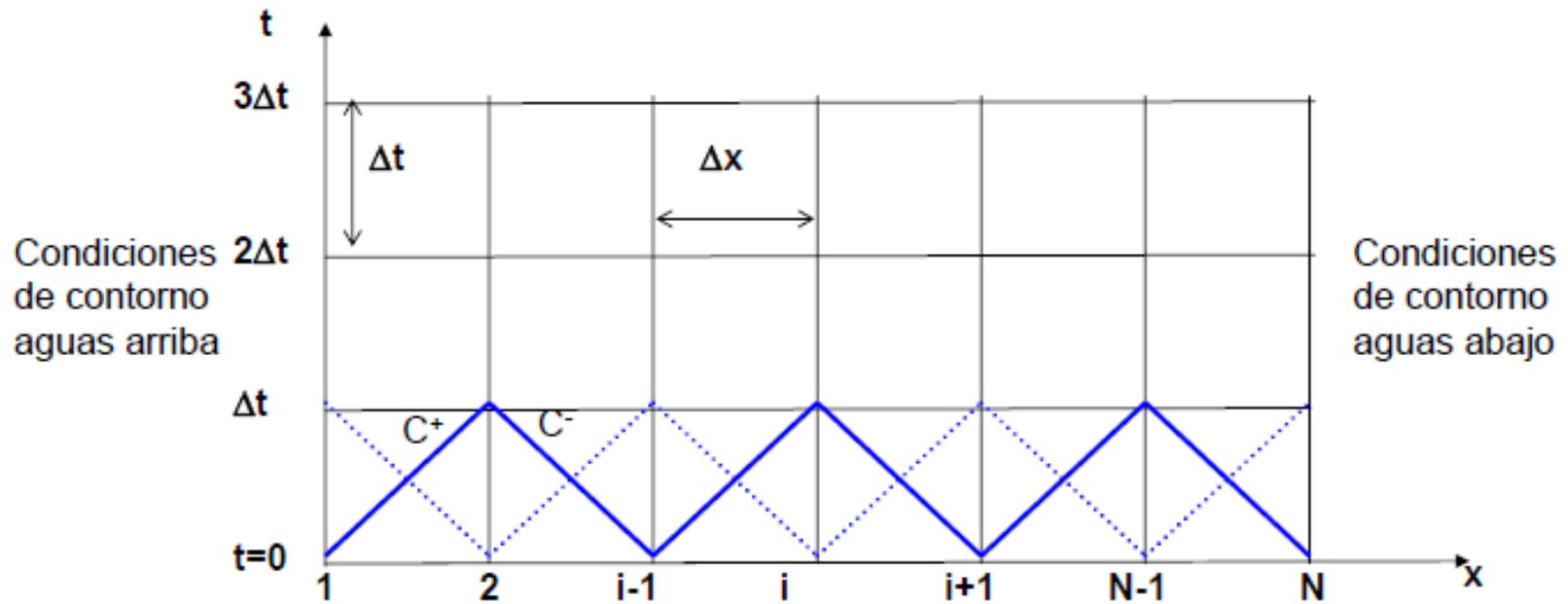
$$\mathbf{C^+} \left| \begin{array}{l} U_P - U_A + \frac{g}{c_A}(h_P - h_A) + g(S_{fA} - S_o)\Delta t = 0 \end{array} \right. \quad (19)$$

$$x_P - x_A = (U_A + c_A)\Delta t \quad (20)$$

$$\mathbf{C^-} \left| \begin{array}{l} U_P - U_B - \frac{g}{c_B}(h_P - h_B) + g(S_{fB} - S_o)\Delta t = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

$$x_P - x_B = (U_A - c_B)\Delta t \quad (22)$$

8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (8)



Las condiciones iniciales se establece para régimen permanente:

Figura N° 5: Disposición de las Líneas Características en una Malla del Plano x-t

La solución será definido para $t > t_0$, donde (t_0) corresponde el estado de flujo estable o permanente. Se asume que en los puntos $1, 2, 3, \dots, N$; las funciones o valores de las variables dependientes representan las condiciones iniciales y son conocidas. El objetivo es llenar los puntos interiores del plano (x,t) en una red de características, de tal modo que las variables dependientes quedan definidos por las intersecciones.



8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (9)

Esto quiere decir que empezando de los puntos conocidos 1, 2, 3, ..., N; los valores de las dos variables dependientes y de las dos independientes en los puntos interiores pueden ser calculados resolviendo el sistema de ecuaciones (19) al (22). Siguiendo el procedimiento descrito, el plano (x,t) completo puede ser llenado con características, como el mostrado en la Figura 5, tal que las variables dependientes estén definidos por las intersecciones. La estabilidad de la solución es verificado permanentemente para ver si la solución no se desarrolla fuera del límite que puede malograr todo el proceso de cálculo.

Las condiciones de contorno son especificados en las fronteras. El número de condiciones debe ser exactamente igual al número de características que se originan en la frontera. Las cuatro posibilidades de condiciones de contorno son mostrados en la Figura 6:

8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (10)

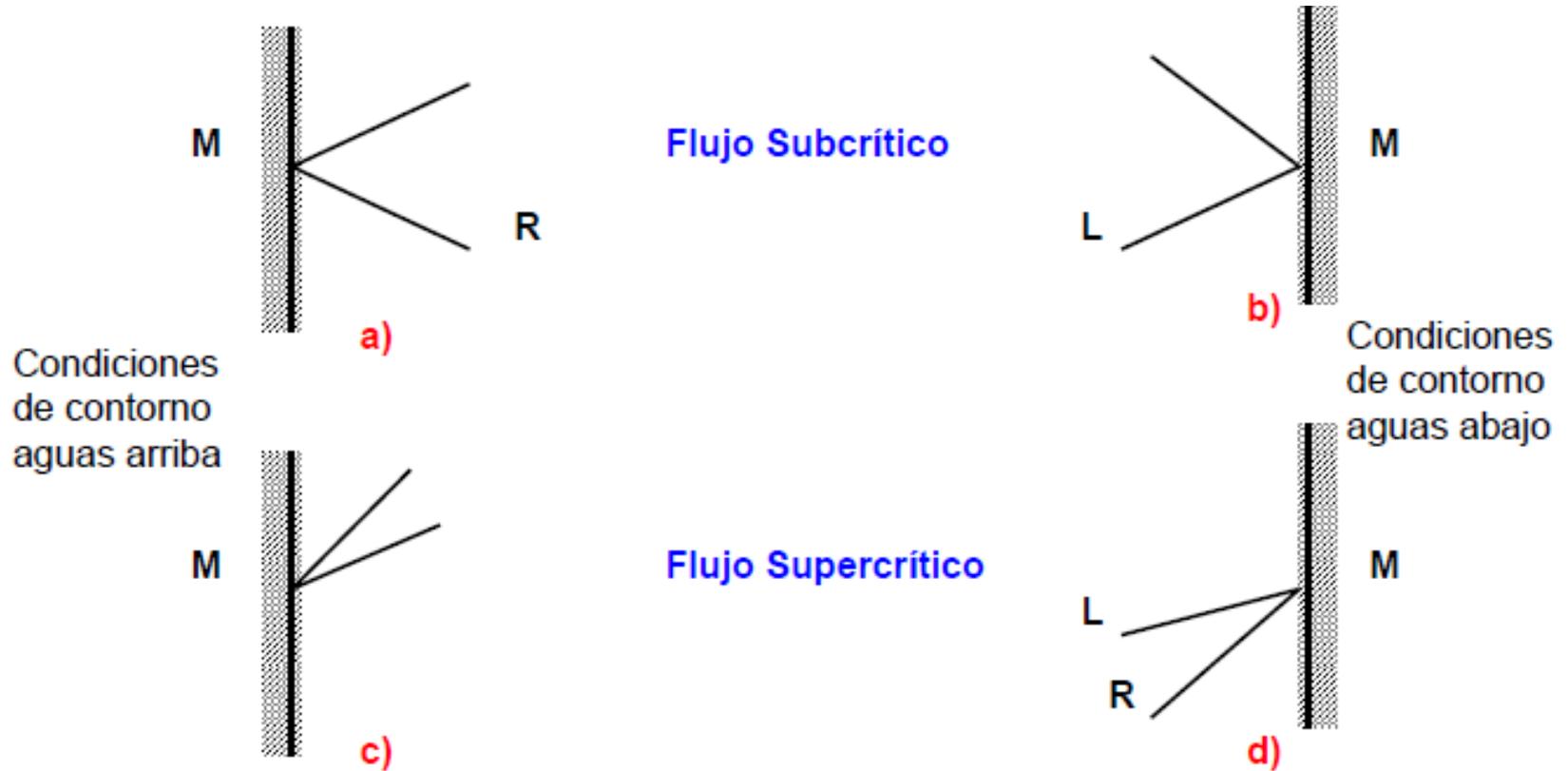


Figura N° 6: Condiciones de Contorno



8. SV - MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS (11)

Caso a: La condición es especificado en la frontera aguas arriba y se usa la ecuación de característica negativa R-M para calcular el segundo punto de variable dependiente en el punto M.

Caso b: Si una condición está dado en la frontera aguas abajo, se usa la ecuación característica positiva a lo largo de L-M.

Caso c: La variable dependiente debe ser especificado a lo largo de la frontera, de tal modo que los valores en M son conocidos antes de la solución.

Caso d: Si no son especificados las condiciones de frontera, las incógnitas deben ser interpolados entre L-M ó R-M, para obtener los variables dependientes en la frontera.



9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (1)

En la actualidad existen una gran variedad de esquemas numéricos en diferencias finitas para la solución aproximada de las ecuaciones diferenciales de Saint Venant. La aplicación de estos esquemas a las ecuaciones diferenciales parciales resultan en ecuaciones algebraicas para las variables desconocidas.

Esquema Explícito

En el esquema explícito las ecuaciones de Saint Venant son convertidos en un conjunto de ecuaciones algebraicas de tal forma que las variables desconocidas (U y h) al final de cada paso de discretización en el tiempo son expresados en términos de los valores conocidos del paso anterior. Considerando, por ejemplo, el esquema de discretización difusivo de la Figura 6, se tiene que los valores de U_{i-1}^j y h_{i-1}^j son conocidos y se desea conocer los valores de U_i^{j+1} y h_i^{j+1} .

9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (2)

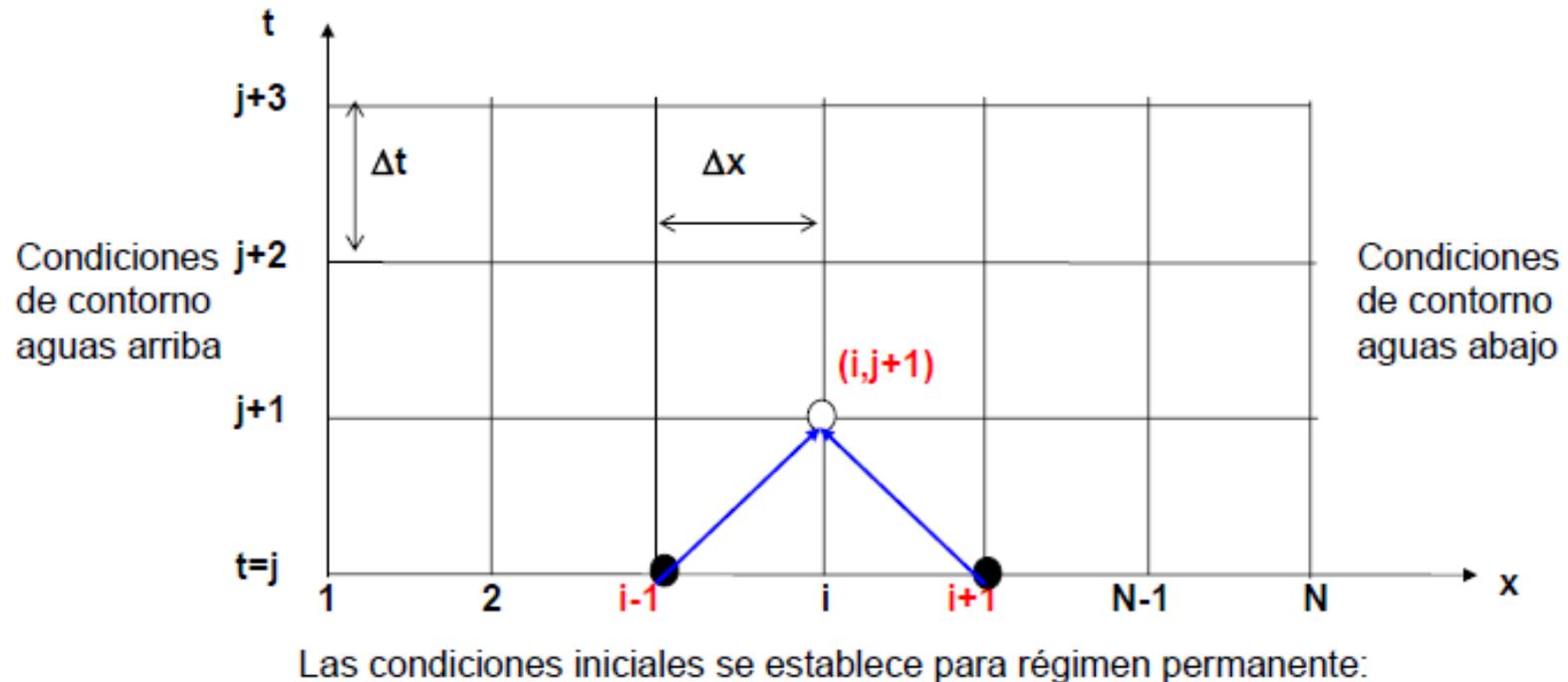


Figura N° 6: Esquema Explícito Difusivo en Diferencias Finitas

De este modo las aproximaciones en diferencias finitas de las derivadas de las ecuaciones de Saint Venant son:

9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (3)

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_i^{j+1} - \left(\frac{h_{i-1}^j + h_{i+1}^j}{2} \right)}{\Delta t} = \frac{2h_i^{j+1} - h_{i-1}^j - h_{i+1}^j}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_i^{j+1} - \left(\frac{U_{i-1}^j + U_{i+1}^j}{2} \right)}{\Delta t} = \frac{2U_i^{j+1} - U_{i-1}^j - U_{i+1}^j}{2\Delta t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i+1}^j - h_{i-1}^j}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2\Delta x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j}{2\Delta x}$$

$$U_i^j = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2}$$

$$h_i^j = \frac{h_{i+1}^j + h_{i-1}^j}{2}$$

$$A_i^j = \frac{A_{i+1}^j + A_{i-1}^j}{2}$$

$$S_i^j = \frac{S_{i+1}^j + S_{i-1}^j}{2}$$



9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (4)

Substituyendo estas aproximaciones en diferencias finitas en las ecuaciones de Saint Venant: ecuación de conservación de masa (2) y ecuación de momento (8) y ordenando se obtiene:

Ecuación de continuidad:

$$h_i^{j+1} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j}{B_{i+1}^j + B_{i-1}^j} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{B_{i+1}^j h_{i+1}^j U_{i+1}^j - B_{i-1}^j h_{i-1}^j U_{i-1}^j}{B_{i+1}^j + B_{i-1}^j}$$

para canal rectangular:

$$h_i^{j+1} = \frac{1}{2}(h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) - \frac{\Delta t}{2B\Delta x} (Q_{i+1}^j - Q_{i-1}^j) = \frac{1}{2}(h_{i-1}^j + h_{i+1}^j) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j U_{i+1}^j - h_{i-1}^j U_{i-1}^j)$$

Ecuación de momento:

$$U_i^{j+1} = \frac{1}{2}(U_{i-1}^j + U_{i+1}^j) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} (U_{i+1}^{j2} - U_{i-1}^{j2}) - \frac{g\Delta t}{2\Delta x} (h_{i+1}^j - h_{i-1}^j) + g\Delta t S_0 - \frac{g\Delta t}{2} (S_{i-1}^j + S_{i+1}^j)$$

9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (5)

Esquema Implícito

En este esquema los valores no conocidos en el paso de tiempo $(j+1)$ ocurre implícitamente en las ecuaciones en diferencias finitas. El método implícito fue desarrollado debido a las limitaciones impuestas en la selección de Δt en el esquema explícito.

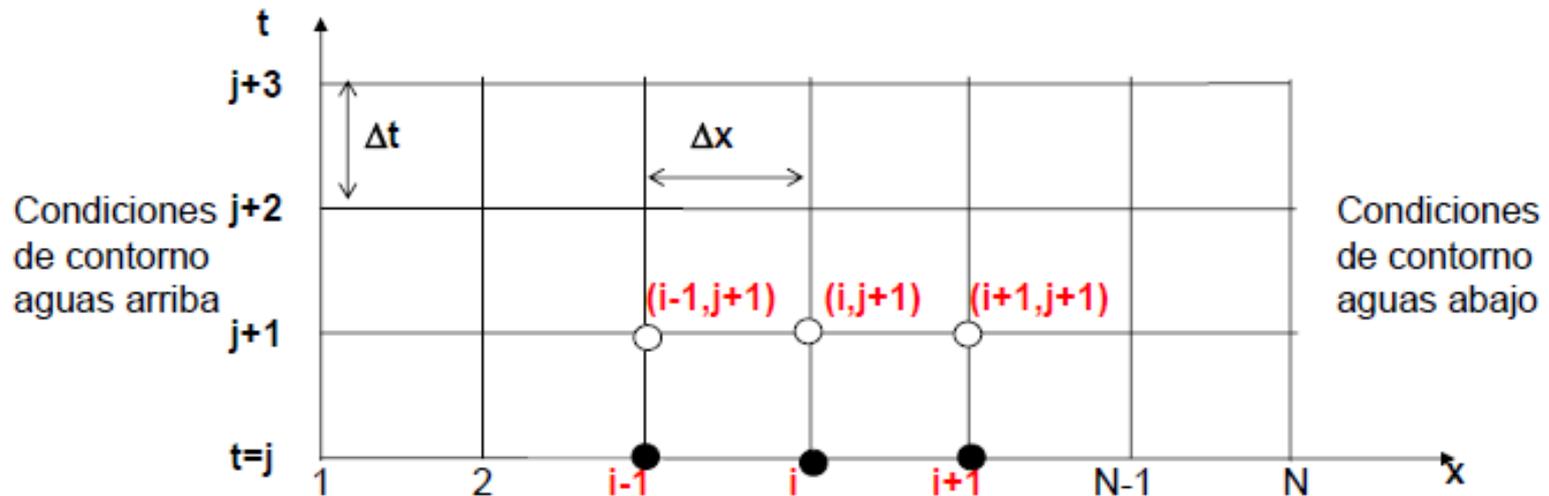


Figura N° 7: Esquema Implícito de Cuatro Puntos en Diferencias Finitas



9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (6)

Las derivadas en (x) en el esquema implícito depende de los parámetros del flujo “conocidos” en el paso de tiempo (j) y “desconocidos” en el paso $(j+1)$. Esto significa que el par de ecuaciones algebraicas escritas para cualquier punto del plano (x,t) consiste de seis valores desconocidos. Pero, dos pares de ecuaciones escritas para los puntos adyacentes, consisten de ocho incógnitas, etc. Esto significa que si se escribe las N ecuaciones para todos las secciones del canal, entonces las $N-2$ ecuaciones escritas para los puntos interiores consistirán de $2N$ incógnitas, cuatro incógnitas más. Para resolver este problema, cuatro ecuaciones adicionales debe ser introducido: las ecuaciones características positivas y negativas y dos condiciones de contorno. Como resultado se obtiene $2N$ ecuaciones con $2N$ incógnitas. Estas ecuaciones algebraicas son lineales, si los coeficientes en la ecuación original son derivadas para el tiempo (j) “conocido”.

9. SV - MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS (7)

Este sistema no puede ser resuelto explícitamente. La solución es más compleja que en el caso del esquema explícito, pero tiene la gran ventaja de no presentar inestabilidad para cualquier Δt y Δx seleccionados. En referencia a la Figura 7 las aproximaciones en diferencias finitas de las derivadas de las ecuaciones de Saint Venant, bajo el esquema implícito de cuatro puntos son:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_i^{j+1} - h_i^j}{\Delta t} + \frac{h_{i+1}^{j+1} - h_{i+1}^j}{\Delta t} \right] = \frac{1}{2\Delta t} (h_i^{j+1} + h_{i+1}^{j+1} - h_i^j - h_{i+1}^j)$$

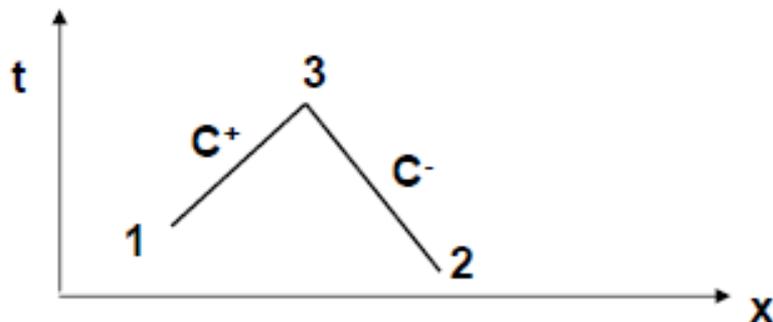
$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\Delta t} + \frac{U_{i+1}^{j+1} - U_{i+1}^j}{\Delta t} \right] = \frac{1}{2\Delta t} (U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1} - U_i^j - U_{i+1}^j)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_{i+1}^{j+1} - h_i^{j+1}}{\Delta x} + \frac{h_{i+1}^j - h_i^j}{\Delta x} \right] = \frac{1}{2\Delta x} (h_{i+1}^{j+1} + h_{i+1}^j - h_i^{j+1} - h_i^j)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{U_{i+1}^{j+1} - U_i^{j+1}}{\Delta x} + \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{\Delta x} \right] = \frac{1}{2\Delta x} (U_{i+1}^{j+1} + U_{i+1}^j - U_i^{j+1} - U_i^j)$$

EJERCICIOS

- 1) Escoger el modelo de onda de flujo transitorio para los siguientes casos:
 - $Q = 200 \text{ m}^3/\text{s}$; $B = 50 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$; $So = 0.0003 \text{ m/m}$; $T = 48 \text{ h}$.
 - $U = 1.2 \text{ m/s}$; $h = 0.3 \text{ m}$; $So = 0.01 \text{ m/m}$; $T = 2 \text{ h}$.
- 2) Para un río de sección rectangular de ancho igual a 10 m; coeficiente de Manning igual a 0.016 y pendiente igual a 0.0001, se dispone de la siguiente información, para el plano (x,t) : Punto 1: $x_1 = 200$; $t_1 = 42 \text{ s}$; $h_1 = 2.0 \text{ m}$; $U_1 = 1.0 \text{ m/s}$. Punto 2: $x_2 = 300$; $t_2 = 40 \text{ s}$; $h_2 = 1.8 \text{ m}$; $U_2 = 0.8 \text{ m/s}$. Mediante el método de las características, determinar la ubicación del punto 3 y verificar la estabilidad numérica de cálculo.



EJERCICIOS

3) Para un canal rectangular de ancho 10 m , coeficiente de rugosidad de Manning igual a 0.016 y pendiente de 0.0006, se tiene la siguiente información tabular, en el tiempo t , para tres secciones distanciadas a 600 m entre ellas:

Sección	Progre siva (m)	Caudal m^3/s	Cota fondo (m)	Cota de agua (m)	Tirante (m)	Area (m^2)	S_f
1	0	55	0.72	2.72	2.0	20	0.0012
2	600	51	0.36	2.26	1.9	19	0.0012
3	1200	47	0.00	1.80	1.8	18	0.0012

Usando el esquema explícito de diferencias finitas calcular la descarga y la elevación del nivel de agua en la sección 2 después de 60 segundos. Asumir que no existe flujo lateral en el canal y verificar la estabilidad numérica de acuerdo al criterio de Courant.