CINEMÁTICA 2

Mecánica de Fluidos Avanzada

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

CAMPO DE VELOCIDADES

- El campo de velocidad está constituido por una distribución continua de una magnitud vectorial definida mediante una función continua de las coordenadas espacio-temporales.
- Cuando se describe el campo de velocidad lo que se describe es el valor de la velocidad para la partícula que ocupa un determinado sitio en el espacio en un instante dado.

- Independientemente del enfoque adoptado (Euler o Lagrange), se puede escribir (en coordenadas cartesianas):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=u(x,y,z,t)\cdot\mathbf{i}+v(x,y,z,t)\cdot\mathbf{j}+w(x,y,z,t)\cdot\mathbf{k}$$

(Coordenadas Cartesianas)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=u_r(r,\theta,z,t)\cdot\mathbf{e}_r+u_\theta(r,\theta,z,t)\cdot\mathbf{e}_\theta+w(r,\theta,z,t)\cdot\mathbf{k}$$

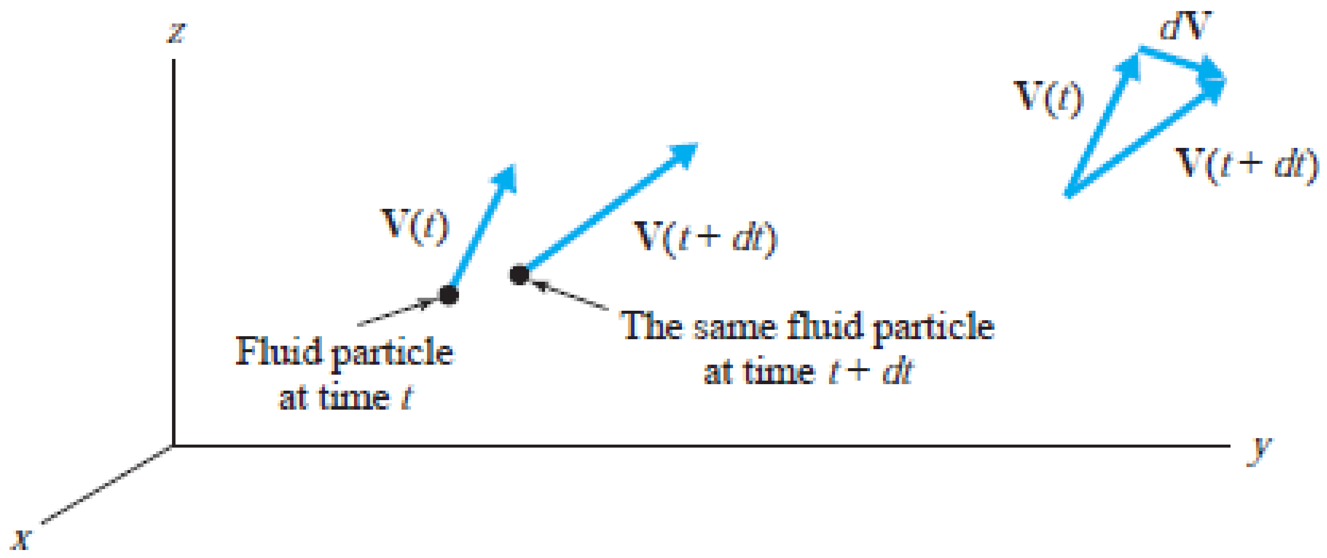
(Coordenadas Cilíndricas)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=u_r(r,\theta,\varphi,t)\cdot\mathbf{e}_r+u_\theta(r,\theta,\varphi,t)\cdot\mathbf{e}_\theta+u_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\cdot\mathbf{e}_\varphi$$

(Coordenadas Esféricas)

CAMPO DE ACELERACIONES (1)

- El gráfico muestra la posición de una partícula en el instante “t” y en el instante “t+dt”, posterior al primero. Para cada instante, las velocidades serán V(t) y V(t+dt), respectivamente.



- Como la velocidad ha cambiado, afirmamos que hay “aceleración”.

CAMPO DE ACELERACIONES (2)

- La aceleración se define como:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

- Bajo el enfoque Lagrangiano, el vector velocidad es:

$$\mathbf{V} = u\hat{\mathbf{i}} + v\hat{\mathbf{j}} + w\hat{\mathbf{k}}$$

donde u, v y w son sus componentes en las direcciones x, y, z; es decir:

$$\frac{dx}{dt} = u \qquad \frac{dy}{dt} = v \qquad \frac{dz}{dt} = w$$

su diferencial será:

$$d\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}dz + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}dt$$

CAMPO DE ACELERACIONES (3)

y la aceleración será:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

- Reemplazando los valores de u, v, w (componentes del vector velocidad):

$$\mathbf{a} = u\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

que define al “campo de aceleraciones”.

- En la expresión anterior, la derivada de la velocidad respecto al tiempo es la “aceleración local” y los demás términos forman la “aceleración convectiva”.

CAMPO DE ACELERACIONES (4)

- Aplicando la derivada sustancial:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

- La aceleración en coordenadas cilíndricas y esféricas es:

Cylindrical

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Spherical

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{r}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\phi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot\theta}{r}$$

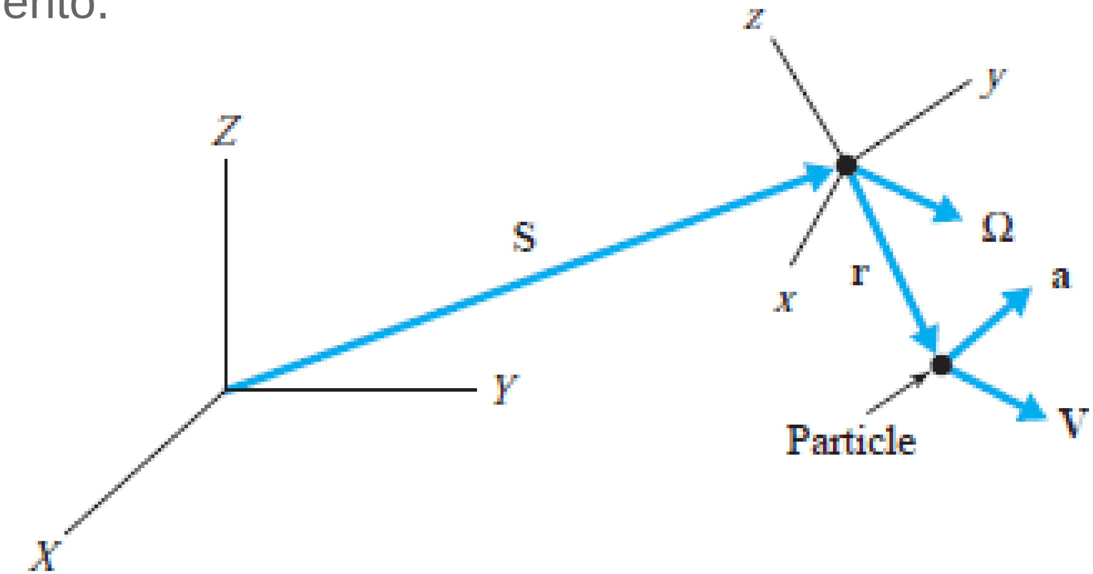
$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\phi + v_\theta v_\phi \cot\theta}{r}$$

EJERCICIO

- Un campo de velocidad está dado por $V=(20y^2i - 20xyj)$m/s. Calcule la aceleración en el punto (1; -1.2).

CAMPO DE ACELERACIONES (5)

- En un caso general, el sistema de referencia puede encontrarse en movimiento.



- Incluyendo la aceleración del sistema de referencia, la aceleración de Coriolis, la aceleración normal y la aceleración angular:

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} + \underbrace{\frac{d^2\mathbf{S}}{dt^2}}_{\text{acceleration of reference frame}} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V}}_{\text{Coriolis acceleration}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{\text{normal acceleration}} + \underbrace{\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}}_{\text{angular acceleration}}$$

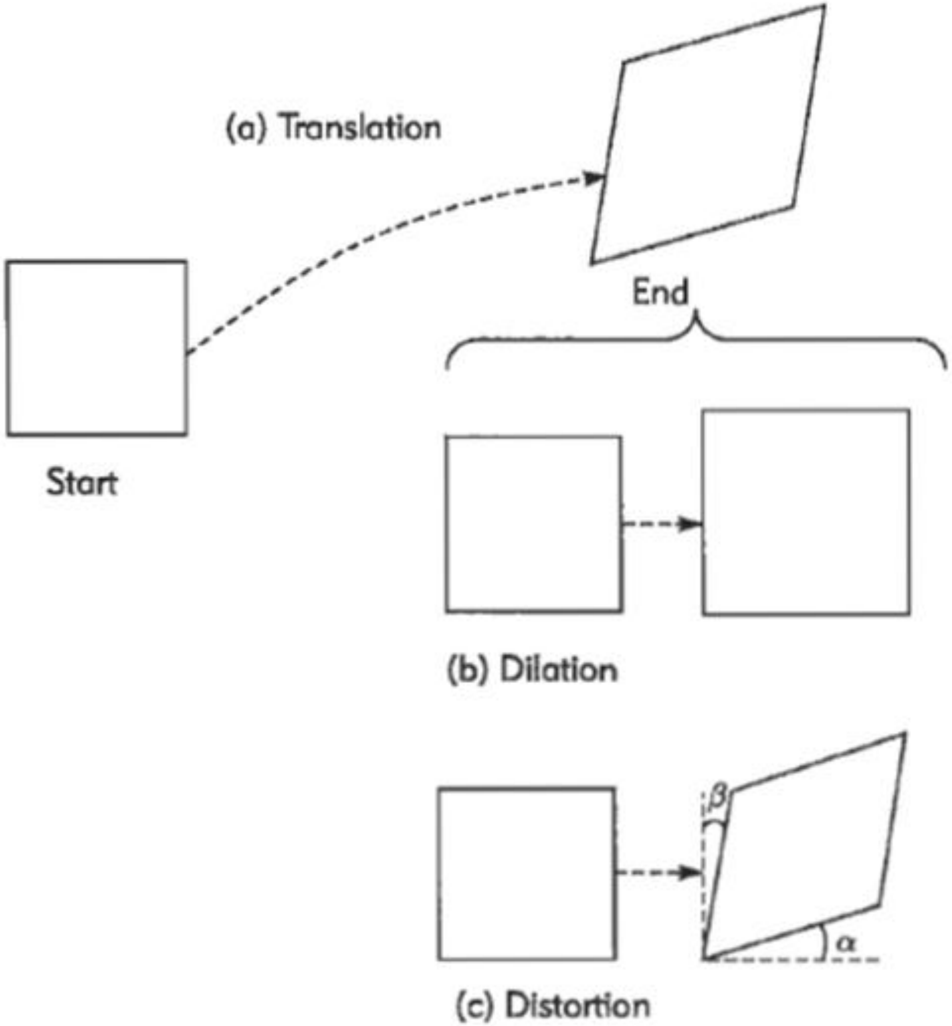
DISTORSIONES EN UN FLUIDO (1)

- Un fluido en movimiento se "transforma" en función a 3 procesos básicos:

1. Traslación; el volumen cambia de posición, pero mantiene su forma y volumen.

2. Compresión/dilatación; el fluido mantiene su forma pero su volumen se incrementa o reduce.

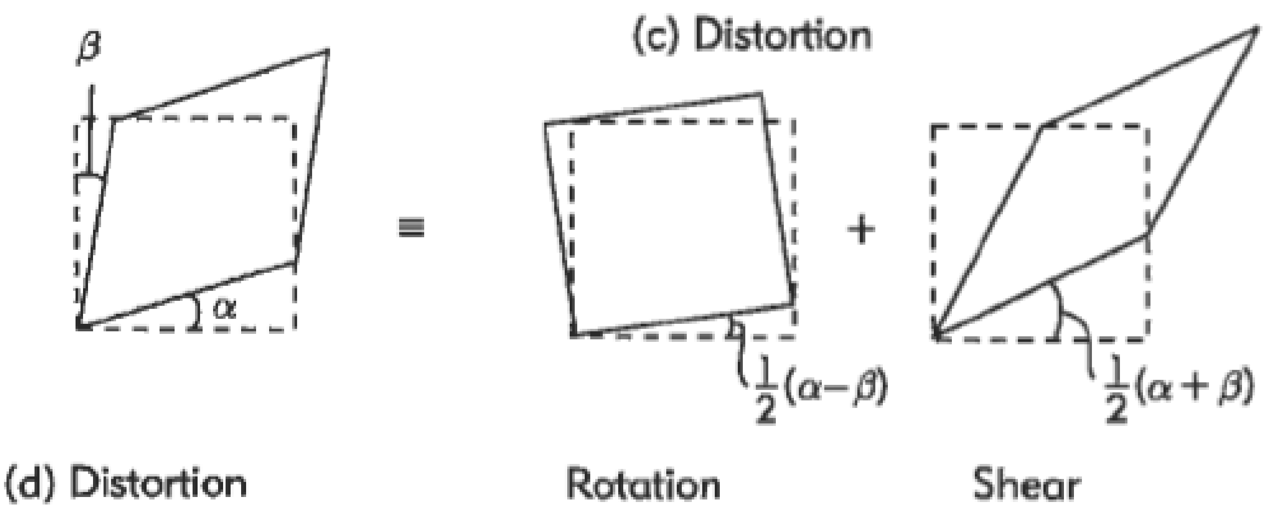
3. Distorsión; el volumen se conserva pero la forma cambia.



DISTORSIONES EN UN FLUIDO (2)

- A su vez, la distorsión puede considerar como la superposición de dos efectos: la rotación y el corte.

- Los ángulos α y β son las deformaciones de corte; así, la rotación se define a través de $(\alpha - \beta)/2$, y el corte a través de $(\alpha + \beta)/2$.



DEFORMACIONES

- Es una representación del desplazamiento entre partículas en el cuerpo respecto a una longitud de referencia.

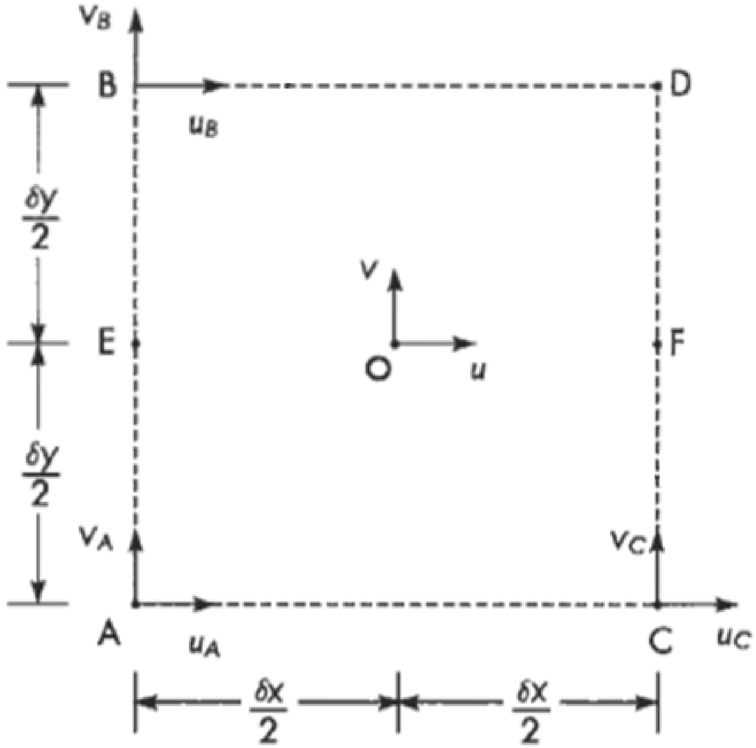
- Al igual que los esfuerzos, una deformación dada puede descomponerse en:

- Deformación de corte; que es la causante de la distorsión.

- Deformación normal o directa; que es la causante de la compresión.

VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN DE CORTE (1)

- Dado el volumen ABCD, y un punto O ubicado en su centro. Si la velocidad en O está dada por (u; v), las velocidades en sus vértices (en función de u y v) serán:



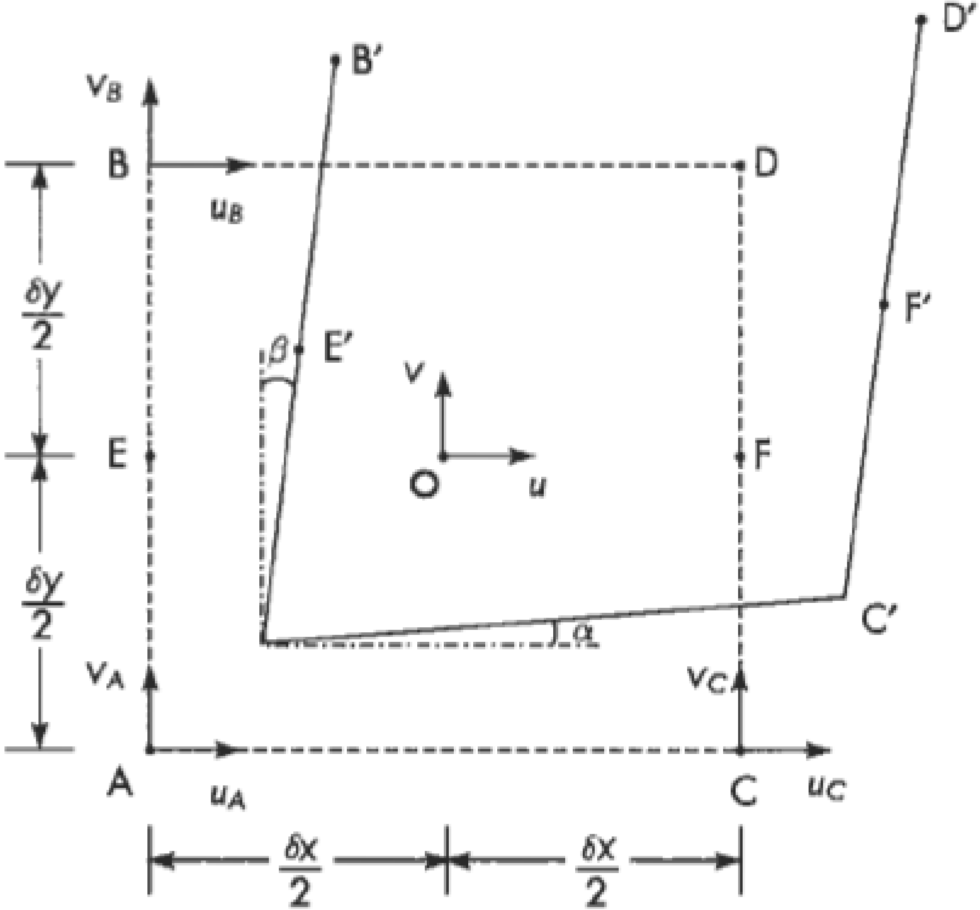
$$u_A = u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2} \quad v_A = v - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$$

$$u_B = u - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2} \quad v_B = v - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$$

$$u_C = u + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\delta y}{2} \quad v_C = v + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\delta x}{2} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\delta y}{2}$$

VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN DE CORTE (2)

- Si el volumen se desplaza a una nueva ubicación:



VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN DE CORTE (3)

- La nueva ubicación de cada vértice se calculará como:

$$x_{A'} = u_A \delta t, \qquad y_{A'} = v_A \delta t$$

- Las deformaciones α y β serán:

$$\alpha = \frac{y_{C'} - y_{A'}}{\delta x} \qquad \beta = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{\delta y}$$

- y reemplazando las velocidades se obtiene:

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x}\delta t \qquad \beta = \frac{\partial u}{\partial y}\delta t$$

VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN DE CORTE (4)

- La Velocidad de deformación de corte se define como la variación del corte respecto al tiempo:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{xy}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta t + \frac{\partial u}{\partial y}\delta t\right)\frac{1}{2\delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

- La Velocidad de deformación de corte en las otras dos direcciones es:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{xz}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad \varepsilon_{yz} = \frac{\mathrm{d}\gamma_{yz}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right);$$

VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN NORMAL O DIRECTA (1)

- Cogiendo dos puntos paralelos E y F (pueden ser también A y C), relación entre la longitud F'E' y la longitud inicial FE es:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{x_{F'} - x_{E'}}{x_F - x_E}$$

que se conoce como deformación directa o normal.

- Reemplazando las expresiones encontradas para la velocidad:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{x_{F'} - x_{E'}}{x_F - x_E} = \frac{\partial u}{\partial x}\delta t$$

VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN NORMAL O DIRECTA (2)

- Derivando respecto al tiempo se obtendrá la Velocidad de deformación normal:

$$\frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{d\varepsilon_{yy}}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

- Con las razones de deformación de corte y de deformación normal, se forma el llamado "tensor de velocidades de deformación".

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_{zz} \end{pmatrix}$$

VORTICIDAD (1)

- Como se mencionó, la rotación se define usando $(\alpha - \beta)/2$ de esta manera, la Velocidad instantánea de rotación de un fluido será:

$$\Omega = \frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt}\right) = \frac{\alpha' - \beta'}{2}$$

- Luego, el vector velocidad angular será:

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)i + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)k$$

- El doble de la velocidad angular se denomina "vorticidad", que se define como:

$$\omega = 2\Omega$$

VORTICIDAD (2)

- La vorticidad puede estimarse en las tres diferentes direcciones, conformando un "vector vorticidad":

$$\omega = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) k$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \nabla x V$$

- Como se observa, la vorticidad es el "doble de la Velocidad instantánea de rotación" del elemento fluido.

EJERCICIO

Un campo de velocidad está dado por $\mathbf{V}=20y2\,\hat{\imath} - 20xy\,\hat{\jmath}$ ***m/s.*** Calcula la aceleración, la velocidad angular, el vector vorticidad, y cualquier componente de la velocidad de deformación no nulo en el punto (1, -1, 2).