FLUJO POTENCIAL

Mecánica de Fluidos Avanzada

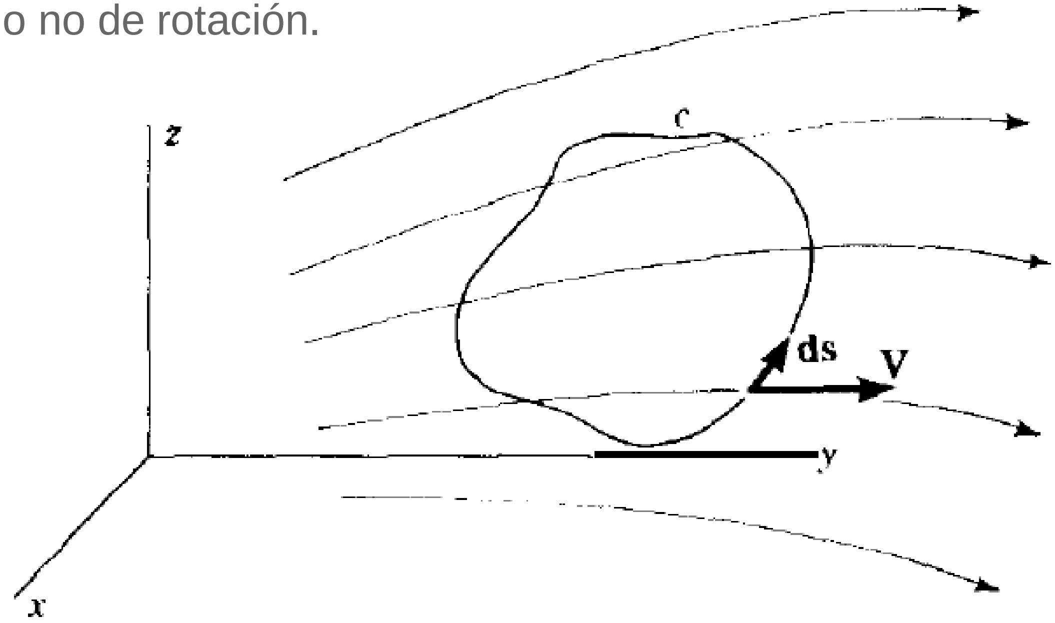
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

CIRCULACIÓN

- La *circulación* del vector velocidad se define como la integral de línea alrededor de una trayectoria cerrada en el instante t de la componente tangencial de velocidad a lo largo de la trayectoria.

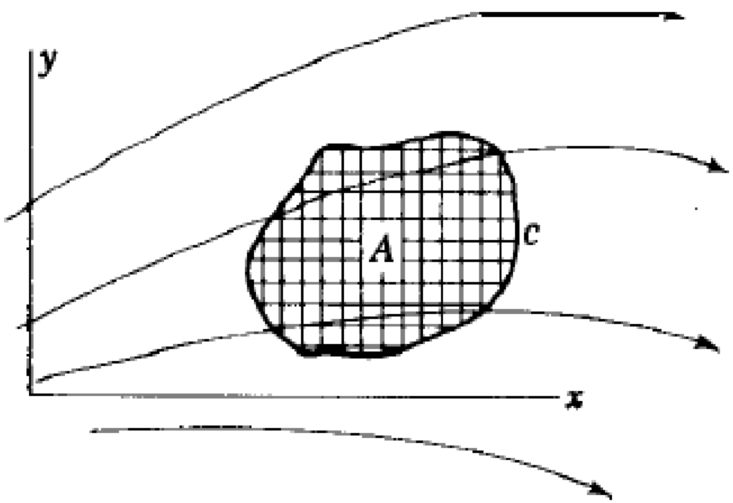
$$\Gamma = \int_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds}$$

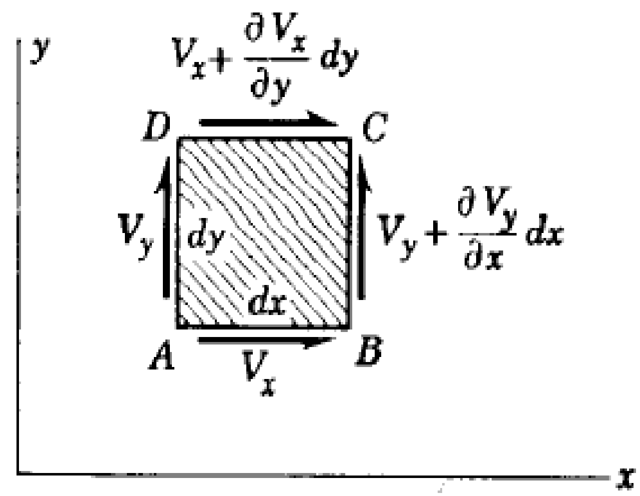
y es una magnitud cinemática que ayuda a interpretar el movimiento fluido porque está relacionada con la existencia o no de rotación.



TEOREMA DE STOKES (1)

- Supongamos una trayectoria rectangular paralela al plano xy; las velocidades sobre cada cara serán:





- Luego, la circulación será:

$$[V.ds] = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dxdy$$

TEOREMA DE STOKES (2)

- Sin embargo, el término de la derecha es el doble de la velocidad angular; es decir, es la vorticidad:

$$d\Gamma = [V.ds] = \left(\nabla x V\right)_z dA$$

- Integrando para el área completa:

$$\Gamma = \oint [V.ds] = \iint \left(\nabla x V\right)_z dA$$

- Éste es el teorema de Stokes bidimensional el cual iguala la circulación de un campo vectorial alrededor de una trayectoria plana con la componente del rotacional del campo perpendicular a la superficie plana encerrada por la trayectoria.

- En general:

$$\Gamma = \iint_A \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \, \mathrm{d}A = \iint_A \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{V} \, \mathrm{d}A = \oint_C \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, \mathrm{d}s$$

TEOREMA DE KELVIN (1)

- Para un elemento de masa, la ecuación de circulación será:

$$\frac{D\Gamma_m}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_{c_m} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{c}$$

$$= \int_{c_m} \left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{c} + \mathbf{V} \cdot d\left[\frac{D\mathbf{c}}{Dt}\right] \right)$$

$$= \int_{c_m} \left(\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{c} + \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} \right)$$

- Luego:

$$\frac{D\Gamma_m}{Dt} = \int_{c_m} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{c}$$

- es decir, “la variación de la circulación respecto al tiempo es igual a la integral curvilínea de la aceleración “, que se conoce como el teorema de Kelvin.

TEOREMA DE KELVIN (2)

- Aplicando el Teorema de Stokes:

$$\frac{D\Gamma_m}{Dt} = \iint_S \left(\nabla \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt}\right) \cdot \mathbf{n}\, dS$$

- Ya que la aceleración puede ser estimada con la ecuación de Navier –Stokes, el rotacional será:

$$\nabla \times \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right) + \nabla \times \mathbf{g} + \nabla \times (\mu \nabla^2 \mathbf{V})$$

$$= \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \mu \nabla^2 \omega$$

- Luego:

$$\frac{D\Gamma_m}{Dt} = \frac{D}{Dt}\iint_S \omega \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S \left[\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \mu \nabla^2 \omega\right] \cdot \mathbf{n}\, dS$$

POTENCIAL DE VELOCIDADES (1)

- Si las componentes de velocidad en todos los puntos de una región del flujo pueden expresarse como derivadas parciales continuas de una función escalar $\phi(x, y, z, t)$:

$$V_x = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial x} \quad V_y = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial y} \quad V_z = \frac{\partial \phi(x, y, z, t)}{\partial z}$$

- se verifica que el flujo es irrotacional y la función ϕ es llamada **potencial de velocidades.**

- Vectorialmente, puede establecerse

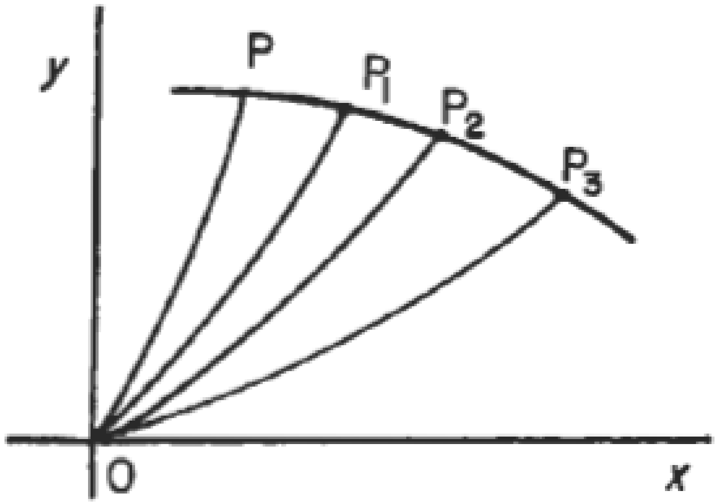
$$\mathbf{V} = \mathbf{grad}\ \phi = \nabla\phi$$

EJEMPLO

- Demuestre que el potencial de velocidades es indicador de la rotación de un flujo.

LÍNEA EQUIPOTENCIAL (1)

Es una línea conformada por puntos que tienen el mismo ϕ.



$$\boxed{\phi_p = \phi_{p1} = \phi_{p2} = \phi_{p3}}$$

Para dos puntos P y Q ubicados sobre dos equipotenciales (cada uno con diferente ϕ), el incremento en el potencial de velocidad de P a Q será:

$$\delta\phi = u\delta x + v\delta y$$

LÍNEA EQUIPOTENCIAL (2)

Por otro lado, como ϕ depende de las dos variables, su diferencial es:

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\delta y$$

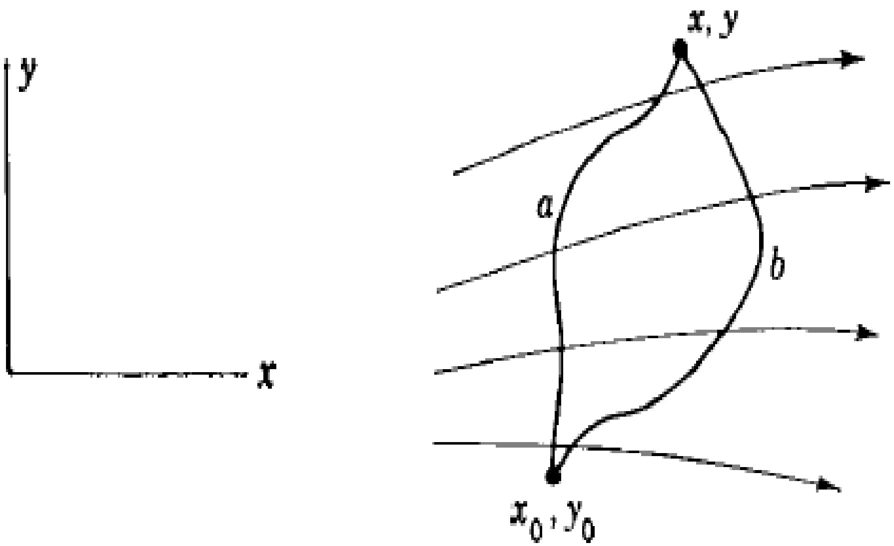
Igualando ambas expresiones, se concluye que:

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{y} \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

FUNCIÓN DE CORRIENTE (1)

Para el flujo mostrado, si se aplica la ecuación de continuidad, se debe cumplir que:

$$\iint_a \rho V.dA + \iint_b \rho V.dA = 0$$



Simplificando la densidad, se obtienen una relación de caudales. Para un espesor unitario en la dirección Z, se tiene:

$$q_\alpha = -\iint_\alpha \mathrm{V} \cdot \mathbf{dA} \quad \text{y} \quad q_\beta = \iint_\beta \mathrm{V} \cdot \mathbf{dA}$$

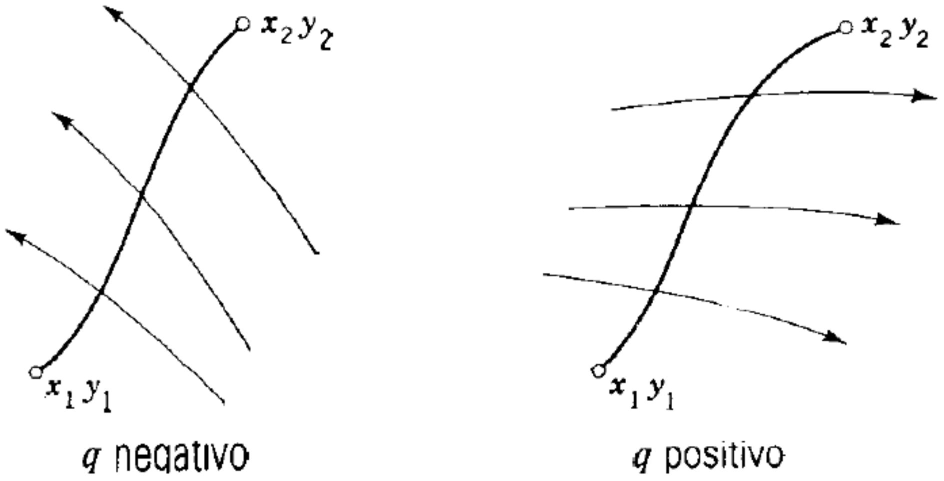
De aquí se concluye que “q” es constante.

La cantidad de fluido que pasa por una línea es llamada “función de corriente” y simbolizada con ψ.

$$\boxed{\mathbf{q}_{x_0 y_0} = \psi_{x_0 y_0}(x, y, t)}$$

FUNCIÓN DE CORRIENTE (2)

Dado un punto sobre una trayectoria, la función de corriente a lo largo de la trayectoria será:



Asimismo, el caudal entre cualquier par de puntos 1 y 2 del flujo puede estimarse como:

$$q_{1,2} = \psi_2 - \psi_1$$

LÍNEA DE CORRIENTE (1)

Es una línea conformada por puntos que tienen el mismo ψ.

$$\boxed{\psi_p = \psi_{p1} = \psi_{p2} = \psi_{p3}}$$

Para dos puntos P y Q ubicados sobre dos líneas de corriente (cada con un diferente ψ), la variación de flujo (que sería la variación de la función corriente) es:

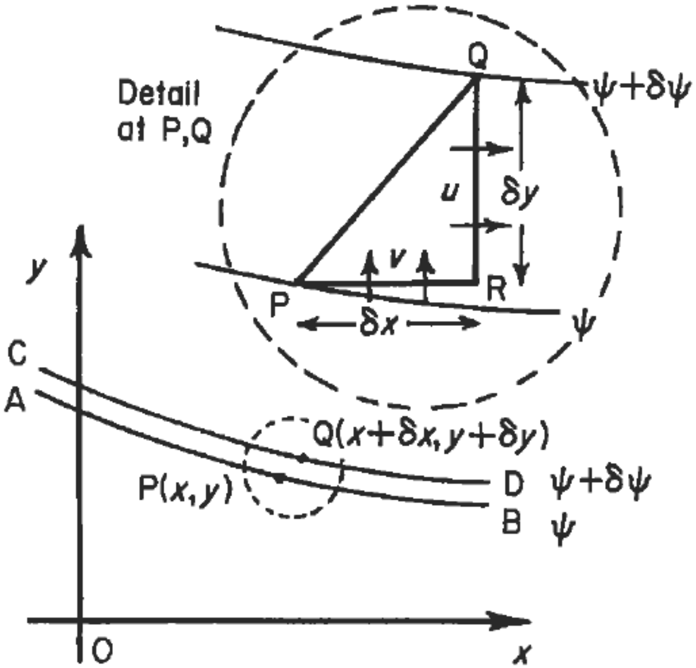
$$\delta\psi = u\delta y - v\delta x$$

Como ψ depende de las dos variables, su diferencial es:

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\psi}{\partial y}\delta y$$

De donde se concluye que:

$$u = \partial\psi/\partial y \qquad \text{y} \qquad v = -\partial\psi/\partial x$$



EJEMPLO 1

Sabiendo que:

$$\psi = 6x + 12y$$

Encuentra la función potencial.

EJEMPLO 2

Un flujo bidimensional tiene el siguiente campo de velocidad:

$$\mathbf{V} = x^2\mathbf{i} + (-2\mathbf{xy} + 4\mathbf{x})\mathbf{j} \ \mathrm{m/s}$$

¿Es irrotacional este flujo? ¿Satisface la ecuación de continuidad? Si esto es así, ¿cuál es ψ, sin tener en cuenta la constante arbitraria de integración?

ECUACIÓN DE LAPLACE (1)

Como ya mencionamos

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Reemplazando en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

que confirma la conservación de la masa.

Asimismo, si se reemplaza el potencial de velocidad en la ecuación de vorticidad se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

que implica una vorticidad nula.

ECUACIÓN DE LAPLACE (2)

Si el reemplazo se hace en orden inverso, el potencial de velocidad en la ecuación de continuidad y la función de corriente en la ecuación de vorticidad, se encuentra que:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

donde la primera es conocida como la ecuación de Laplace. Ésta puede escribirse también como:

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \psi = 0$$

VARIABLES DE CAUCHY-RIEMANN

Se conoce con este nombre a las expresiones

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

En coordenadas polares:

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \qquad V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$$

EJEMPLO 1

Suponga que $\phi = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$ es el potencial de velocidad de un flujo bidimensional, irrotacional e incompresible definido en todas partes menos en el origen. Determine la función de corriente para este flujo.

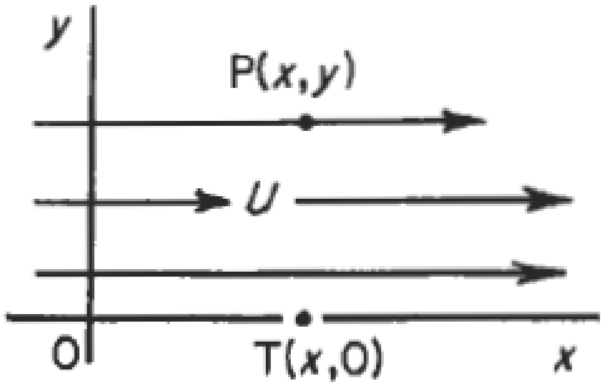
FLUJOS BIDIMENSIONALES

Los principales son:

-Uniforme paralelo
-Fuente
-Sumidero
-Vórtice

Muchos otros tipos de flujo son representados como la combinación de los arriba presentados.

FLUJO UNIFORME

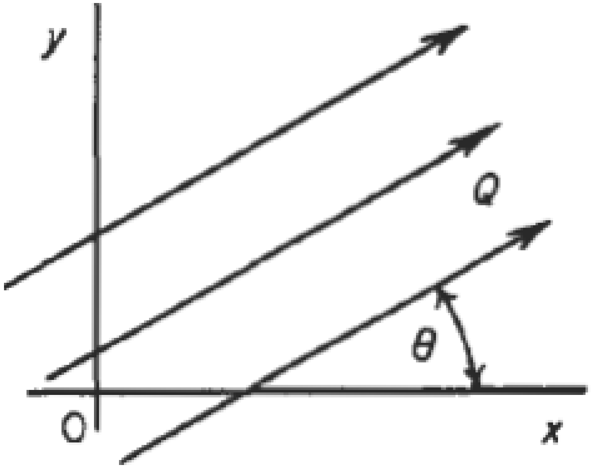


Si el flujo es paralelo al eje X:

$$\psi = Uy \qquad \text{y} \qquad \phi = Ux$$

Si el flujo es paralelo al eje Y:

$$\psi = -Vx \qquad \text{y} \qquad \phi = Vy$$



Para el caso general:

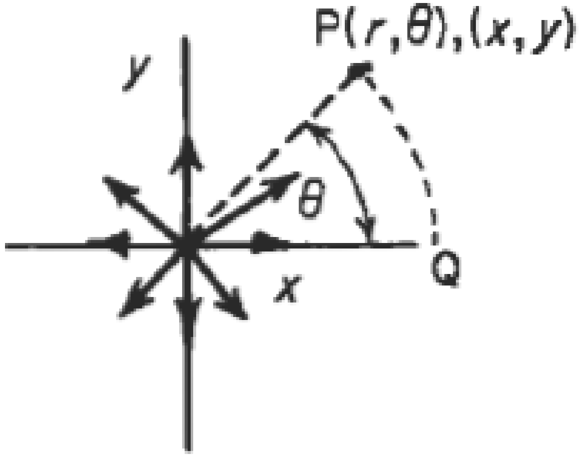
$$\psi = -Vx + Uy \qquad \text{y} \qquad \phi = Ux + Vy$$

FUENTE (1)

Es un punto en el espacio del cual sale fuido con un gasto constante. Su función corriente es:

$$\psi = m\theta/2\pi$$

$$\psi = \frac{m}{2\pi}\tan^{-1}\frac{y}{x}$$



Su potencial de velocidad:

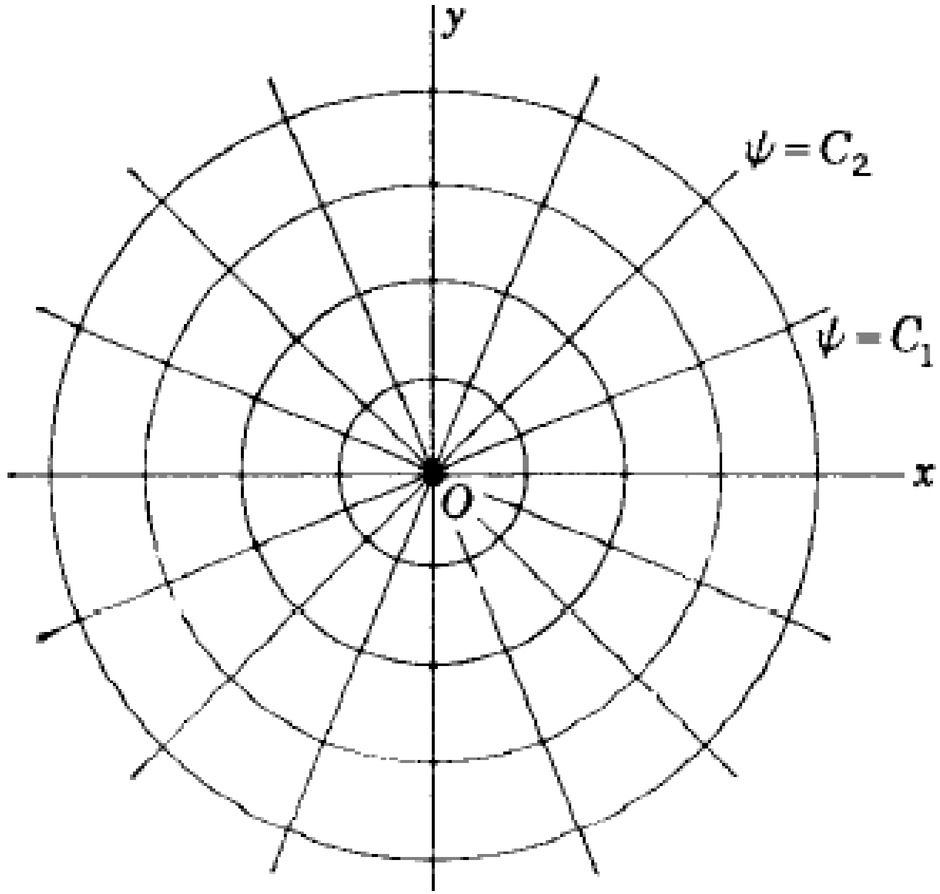
$$\phi = \int_{r_0}^{r}\frac{m}{2\pi r}\mathrm{d}r = \frac{m}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0} \quad \text{o} \quad \phi = \frac{m}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$$

que, despejando, se convierte en

$$r^2 = \mathrm{e}^{4\pi(\phi+C)/m}$$

Círculos concéntricos!

FUENTE (2)



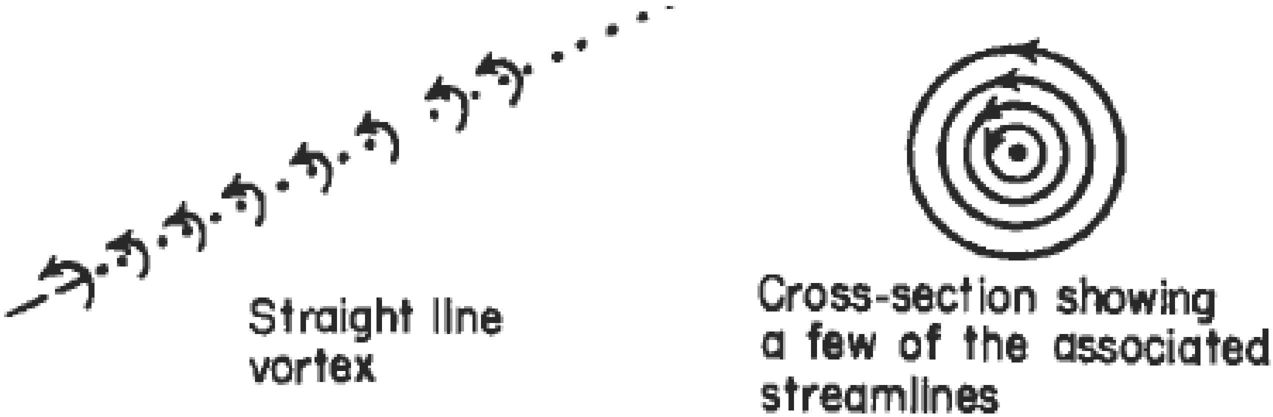
SUMIDERO

Es una fuente negativa.

VÓRTICE POTENCIAL (1)

Un vórtice líneal se describe como “una cadena de partículas rotando”: Una cadena de partículas de fluido gira sobre su eje común y lleva con ellos una nube de partículas de fluido que fluyen alrededor en círculos.

Los vórtices son comunes en la naturaleza, la diferencia entre un vórtice real y uno teórico es que el primero tiene un núcleo de fluido que está girando como un sólido.



La circulación alrededor de un cilindro de radio r será:

$$\Gamma = 2\pi r V$$

donde V es la velocidad correspondiente al radio r.

La circulación de un vórtice potencial define su “intensidad”.

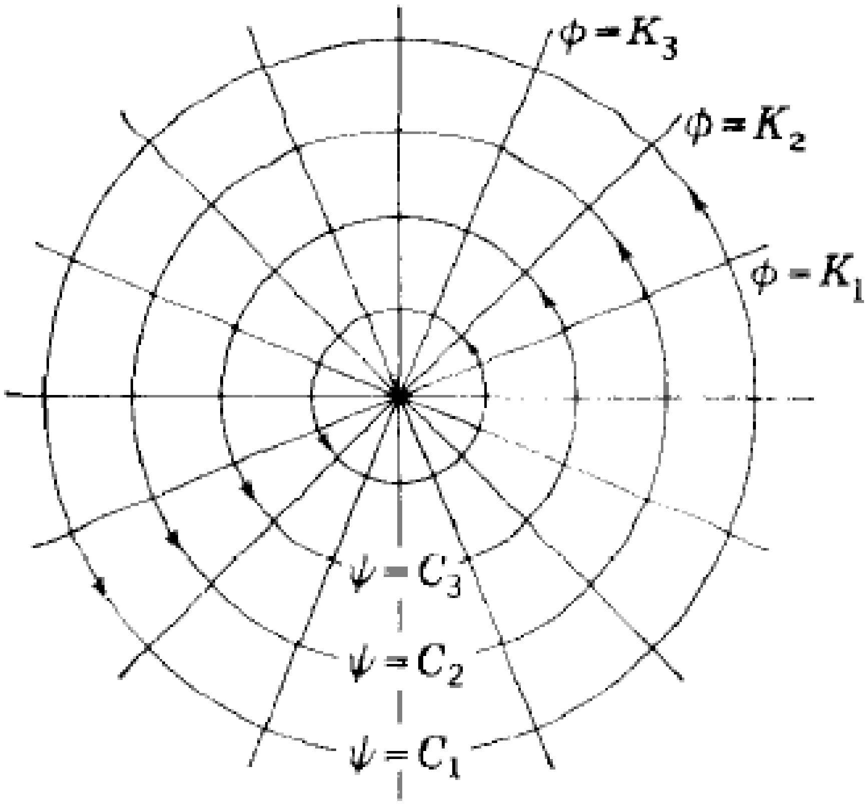
VÓRTICE (3)

Su función corriente es:

$$\psi = -\left[\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r\right]_{r_0}^{r} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r}{r_0}$$

Su potencial de velocidad:

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$



EJEMPLO 1

Un flujo bidimensional permanente está definido por el campo de velocidades:

$U=2x-3y;$
$V=3x-2y.$

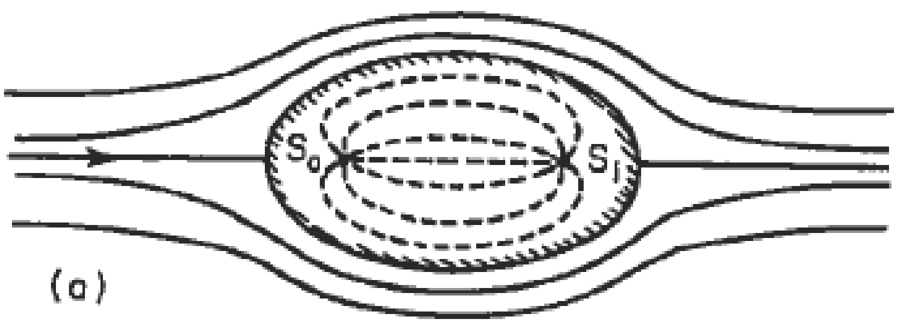
Demuestre que el flujo es incompresible.

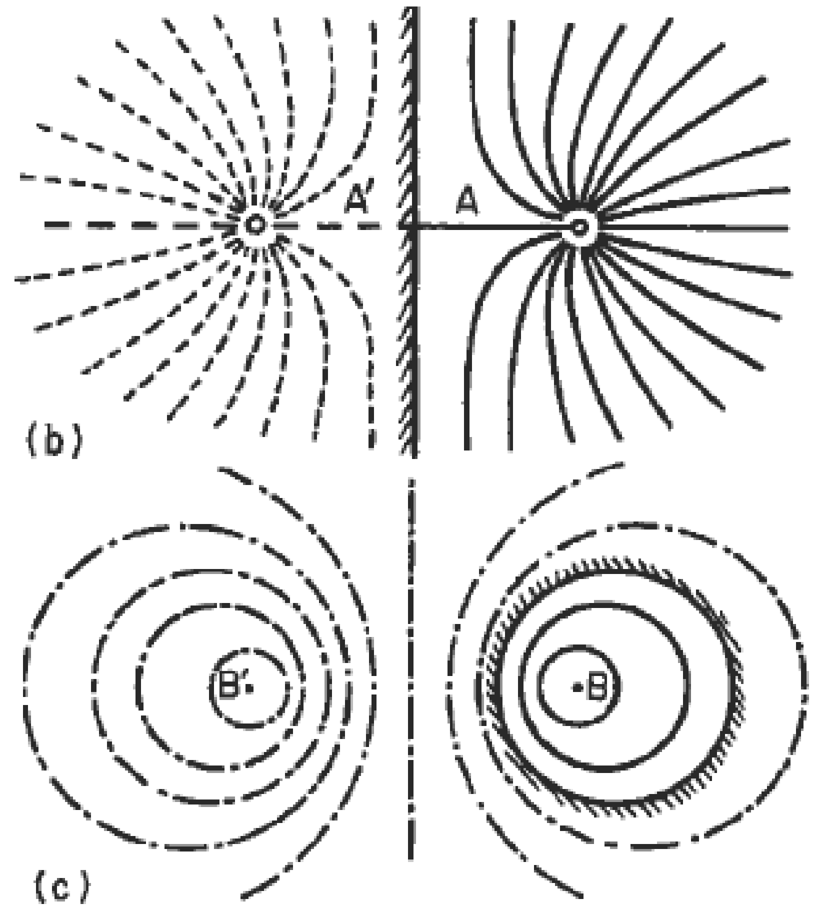
EJEMPLO 2

Para el ejemplo anterior, determinar la ecuación de las líneas de corriente.

LÍMITES SÓLIDOS

Ya que flujo no cruza una línea de corriente permite que una línea de corriente de un flujo no viscoso puede ser sustituido por un límite sólido de la misma forma sin afectar a la resto del patrón de flujo.





SUPERPOSICIÓN DE FLUJOS

Para combinar dos o más flujos, bastará con dibujarlos uno sobre otro y unir puntos donde “LA SUMA DE Ψ SEA LA MISMA”

EJEMPLO 1

Dibujar el flujo resultante de combinar una fuente de intensidad q y una corriente uniforme de velocidad –U (paralela al eje de las abscisas). Asuma que U=y=1. ¿a qué obstáculo representa este flujo?

EJEMPLO 2

Dibujar el flujo resultante de combinar una fuente de intensidad q, un sumidero de intensidad q y una corriente uniforme de velocidad –U (paralela al eje de las abscisas). Asuma que U=h=1. ¿a qué obstáculo representa este flujo?